# Математическое моделирование и теория электрических цепей

Математическое моделирование

Бейдерман.

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
ИНСТИТУТ КИБЕРНЕТИКИ

2 "К" лаб. МСУ

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

ТРУДЫ СЕМИНАРА ПО МЕТОДАМ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
И ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

*ВЫПУСК V*




КИЕВ—1967

6 П 2. 15
М 34

В сборнике публикуются статьи по теории цепей и электронного моделирования, синтезу квазианалоговых математических машин с переключаемыми решающими элементами, моделированию задач исследования операций, задач строительной механики и оптимальных многосвязных систем.

Книга рассчитана на инженеров, научных работников, аспирантов и студентов, интересующихся электронным моделированием, теорией цепей и различными применениями вычислительной техники.

Ответственный редактор
член-корреспондент АН УССР
*Г. Е. ПУХОВ*

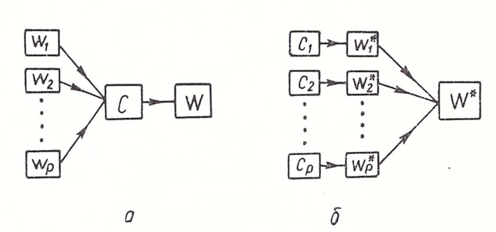
ХАРЬКОВСКАЯ ТИПООФСЕТНАЯ ФАБРИКА

2—2—4
59—67М

# О РАСЧЕТЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ МЕТОДОМ ПОДСХЕМ

Н. Г. МАКСИМОВИЧ

В некоторых случаях расчет сложной электрической цепи с большим числом ветвей и многополюсных элементов необходимо вести по частям. Это значит, что исходная цепь расчленяется на части и для каждой из них в отдельности составляются уравнения, а затем определяется уравнение цепи в целом. Применяемые для этого методы расчета, по своей структуре действий, можно разделить на два типа.




*а* *б*

Первый из них характеризуется тем, что для составных частей 1, 2, ..., $p$ цепи находятся уравнения $w_1$, $w_2$, ..., $w_p$ независимо от схем соединений этих частей между собой в рассматриваемой цепи, а затем при составлении уравнения $W$ цепи в целом учитывается существующая схема $C$ взаимных соединений принятых частей цепи. Такая структура действий показана схематически на рисунке (*а*).

Структура действий методов расчета второго типа отличается от предыдущей тем, что сначала исследуются схемы соединений $c_1$, $c_2$, ..., $c_p$ каждой принятой составной части цепи с другими ее частями, и в зависимости от конкретной схемы соединений $c_m$ части $m$ цепи, определяется для этой части специальным образом ее уравнение $\overset{*}{w}_m$. Искомое уравнение $W^*$ цепи в целом получается из найденных уравнений $\overset{*}{w}_m$ для $m = 1, 2, ..., p$ однотипным простым способом вычисления, не зависящим уже от схемы соединений $C$ составных частей (рисунок, *б*).

В связи с тем, что в последнем случае методика составления исходных уравнений отдельных частей цепи, а также и формулы получения итогового уравнения цепи в целом являются едиными, не зависящими от конкретной схемы соединений, метод рассчета,

основанный на таком принципе, весьма выгодно отличается от иных методов своей универсальностью. Таким является метод подсхем, разработанный Г. Е. Пуховым [1, 2].

В настоящей работе, в дополнение к применяемым в методе подсхем формулам, приводится новая формула получения уравнения цепи, подчеркивающая своей структурой указанную выше универсальность этого метода.

В методе подсхем внешние токи и напряжения каждой отдельной части $m$ цепи (в дальнейшем — подсхема $m$) рассматриваются с точки зрения их взаимозависимостей с токами и напряжениями других подсхем цепи и на основании этого разделяются на четыре категории: входных, выходных, суммирующихся и общих величин, выраженных соответственно многомерными векторами $\vec{\rho}_{\text{н}}^{(m)}$, $\vec{\rho}_{\text{к}}^{(m)}$, $\vec{\rho}_{\text{с}}^{(m)}$, $\vec{\rho}_{\text{о}}^{(m)}$. С помощью такого действия учитывается, согласно структурной схеме рисунка, *б*, схема соединений $\overset{*}{c}_m$ рассматриваемой $m$-ой подсхемы. Затем составляется уравнение $\overset{*}{w}_m$ этой подсхемы в виде линейной зависимости входных и суммирующихся величин от выходных и общих

$$\left(\vec{\rho}_{\text{н}}^{(m)},\ \vec{\rho}_{\text{с}}^{(m)}\right) = Z^{(m)}\left(\vec{\rho}_{\text{к}}^{(m)},\ \vec{\rho}_{\text{о}}^{(m)}\right) + \vec{\zeta}_{\text{о}}^{(m)}, \tag{1}$$

где

$$Z^{(m)} = \left\|\begin{array}{c|c} Z_{11}^{(m)} & Z_{12}^{(m)} \\ \hline Z_{21}^{(m)} & Z_{22}^{(m)} \end{array}\right\| \tag{2}$$

является обобщенным матричным параметром подсхемы $m$, а

$$\vec{\zeta}_{\text{о}}^{(m)} = \left(\vec{\zeta}_{10}^{(m)},\ \vec{\zeta}_{20}^{(m)}\right) \tag{3}$$

ее обобщенный векторный параметр. Для подсхемы, в которой отсутствуют источники энергии, векторный параметр $\vec{\zeta}_{\text{о}}^{(m)}$ равен нулю.

Для получения уравнения $W^*$ цепи в целом в методе подсхем рекомендуются достаточно простые преобразования матричных и векторных параметров подсхем (2) и (3) в новые, так называемые удлиненные или расширенные матрично-векторные параметры подсхем. Но эту же задачу можно решить без введения удлиненных параметров и получить при этом также простые и легко запоминающиеся формулы.

Пусть рассматриваемая схема состоит из двух произвольно соединенных между собой подсхем. Матричные параметры (2)

каждой из подсхем имеют вид

$$Z' = \left\| \begin{array}{c|c} Z'_{11} & Z'_{12} \\ \hline Z'_{21} & Z'_{22} \end{array} \right\|; \quad Z'' = \left\| \begin{array}{c|c} Z''_{11} & Z''_{12} \\ \hline Z''_{21} & Z''_{22} \end{array} \right\|, \tag{4}$$

а их векторные параметры (3):

$$\vec{\zeta}'_{o} = \left(\vec{\zeta}'_{10},\ \vec{\zeta}'_{20}\right); \quad \vec{\zeta}''_{o} = \left(\vec{\zeta}''_{10},\ \vec{\zeta}''_{20}\right). \tag{5}$$

Матрицу $Z'$ первой подсхемы можно расчленить на составляющие, отвечающие ее выходным и общим величинам:

$$Z'_{к} = \left\| \begin{array}{c|c} Z'_{11} & \cdot \\ \hline Z'_{21} & \cdot \end{array} \right\|; \quad Z'_{o} = \left\| \begin{array}{c|c} \cdot & Z'_{12} \\ \hline \cdot & Z'_{22} \end{array} \right\|, \tag{6}$$

а матрицу $Z''$ второй подсхемы — на составляющие, отвечающие входным и суммирующимся величинам:

$$Z''_{н} = \left\| \begin{array}{c|c} Z''_{11} & Z''_{12} \\ \hline \cdot & \cdot \end{array} \right\|, \quad Z''_{c} = \left\| \begin{array}{c|c} \cdot & \cdot \\ \hline Z''_{21} & Z''_{22} \end{array} \right\|. \tag{7}$$

Пользуясь этими составляющими, записываем исходные уравнения (1) подсхем.

Для первой подсхемы:

$$\left(\vec{\rho}'_{н},\ \vec{\rho}'_{c}\right) = Z'_{к}\left(\vec{\rho}'_{к},\ 0\right) + Z'_{o}\left(0,\ \vec{\rho}'_{o}\right) + \vec{\zeta}'_{o}, \tag{8}$$

для второй подсхемы:

$$\left.\begin{aligned} \left(\vec{\rho}''_{н},\ 0\right) &= Z''_{н}\left(\vec{\rho}''_{к},\ \vec{\rho}''_{o}\right) + \left(\vec{\zeta}''_{10},\ 0\right), \\ \left(0,\ \vec{\rho}''_{c}\right) &= Z''_{c}\left(\vec{\rho}''_{к},\ \vec{\rho}''_{o}\right) + \left(0,\ \vec{\zeta}''_{20}\right). \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Обозначая векторами $\vec{\rho}_{н}$, $\vec{\rho}_{к}$, $\vec{\rho}_{c}$, $\vec{\rho}_{o}$, начальные, конечные, суммирующиеся и общие величины схемы в целом и учитывая, что для рассматриваемого случая справедливы зависимости

$$\left.\begin{aligned} &\vec{\rho}_{н} = \vec{\rho}'_{н};\ \vec{\rho}'_{к} = \vec{\rho}''_{н};\ \vec{\rho}''_{к} = \vec{\rho}_{к}, \\ &\vec{\rho}_{c} = \vec{\rho}'_{c} + \vec{\rho}''_{c}, \\ &\vec{\rho}_{o} = \vec{\rho}'_{o} = \vec{\rho}''_{o}, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

получим

$$\left.\begin{aligned}&\left(\vec{\rho}_к', 0\right) = \left(\vec{\rho}_н'', 0\right),\\&\left(\vec{\rho}_н', \vec{\rho}_c'\right) + \left(0, \vec{\rho}_c''\right) = \left(\vec{\rho}_н, \vec{\rho}_c\right).\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Пользуясь этими зависимостями и подставляя первое из уравнений (9) в уравнение (8), а затем суммируя полученное со вторым уравнением (9), находим

$$\left(\vec{\rho}_н, \vec{\rho}_c\right) = \left[Z_к' Z_н'' + Z_o' + Z_c''\right]\left(\vec{\rho}_к, \vec{\rho}_o\right) + \left[\vec{\zeta}_o' + Z_к'\vec{\zeta}_o'' + \left(0, \vec{\zeta}_{20}''\right)\right], \tag{12}$$

из чего следует формула, определяющая матричный параметр схемы

$$Z = Z_к' Z_н'' + Z_o' + Z_c'', \tag{13}$$

или

$$Z = \begin{Vmatrix} Z_{11}' & \cdot \\ Z_{21}' & \cdot \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} Z_{11}'' & Z_{12}'' \\ \cdot & \cdot \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \cdot & Z_{12}' \\ \cdot & Z_{22}' \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \cdot & \cdot \\ Z_{21}'' & Z_{22}'' \end{Vmatrix} \tag{14}$$

и формула, выражающая ее векторный параметр

$$\vec{\zeta}_o = \vec{\zeta}_o' + Z_к'\vec{\zeta}_o'' + \left(0, \vec{\zeta}_{20}''\right), \tag{15}$$

или

$$\vec{\zeta}_o = \vec{\zeta}_o' + \begin{Vmatrix} Z_{11}' & \cdot \\ Z_{21}' & \cdot \end{Vmatrix} \vec{\zeta}_o'' + (0, \vec{\zeta}_{20}'') \tag{16}$$

Полученная формула (14) нахождения эквивалентной матрицы легко запоминается: составляющие матриц, отвечающие выходным и входным величинам, перемножаются, а отвечающие общим и суммирующимся — складываются. Ее можно считать формулой нахождения эквивалентной матрицы для общего случая последовательно-параллельного соединения двух многополюсников.

Для частного случая соединения подсхем, когда все токи и напряжения расчленяются только на две категории: общих и суммирующихся величин, т. е. когда $\vec{\rho}_н = 0$ и $\vec{\rho}_к = 0$, как это имеет место при параллельном соединении двух многополюсников, матрицы $Z_к$ и $Z_н$ каждой подсхемы равны нулю, и формулы (14) и (16) переходят в известные формулы суммирования матриц и векторов параллельно соединяемых многополюсников

$$\left.\begin{aligned}&Z = Z_{22}' + Z_{22}'',\\&\vec{\zeta}_o = \vec{\zeta}_{20}' + \vec{\zeta}_{20}''.\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Для другого частного случая, когда есть только входные и выходные величины, а суммирующиеся и общие равны нулю ($\vec{\rho}_c = 0$ и $\vec{\rho}_o = 0$), нулевыми являются матрицы $Z_c$ и $Z_0$ подсхем, в связи с чем формулы (14) и (16) становятся идентичными с формулами для последовательного соединения проходных многополюсников

$$\left.\begin{aligned} Z &= Z'_{11} Z''_{11}, \\ \vec{\zeta}_o &= \vec{\zeta}'_{10} + Z'_{11} \vec{\zeta}''_{10}. \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

При произвольном числе $p$ составных подсхем формулы (14) и (16) надо применить $p-1$ раз, находя поочередно эквивалентные многополюсники каждых двух подсхем.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Пухов Г. Е.— Электричество, 1952, 8.
2. Пухов Г. Е. Избранные вопросы теории математических машин. Изд-во АН УССР, К., 1964.

Рассмотрено на семинаре
24 июня 1966 г.

# АНАЛОГОВЫЕ И КВАЗИАНАЛОГОВЫЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СРЕДЫ

Г. Е. ПУХОВ, Б. А. БОРКОВСКИЙ

1. Твердые вычислительные среды несомненно являются наиболее перспективной конструктивной формой как цифровых, так и аналоговых вычислительных машин будущего. Многие из тех функций, которые выполняются в настоящее время схемами, построенными из отдельных элементов, в будущем будут выполняться монолитными твердыми схемами. Твердые схемы, изготовленные в виде одной сплошной платы или объемного тела, имеют целый ряд хорошо известных преимуществ [1]. В статье излагаются некоторые возможные пути развития моделирующих математических машин, связанные с применением твердых аналоговых и квазианалоговых вычислительных сред.

2. Аналоговой вычислительной средой назовем такое тело, которое является решающей частью моделирующего устройства, построенного на основе принципа подобия. При моделировании уравнения Лапласа в качестве аналоговых вычислительных сред применяются электропроводящая бумага, пластины из проводящей резины, проводящие ткани, проводящие пластмассы [2], при моделировании уравнения Фурье — электропроводящая бумага с распределенной емкостью [3]. Находят применение и другие вычислительные среды.

Квазианалоговой вычислительной средой назовем такое тело или совокупность объединенных и жестко соединенных между собой твердых схем, которые можно использовать как решающую часть моделирующего устройства, построенного на основе принципа эквивалентности [4]. Состояние квазианалоговых вычислительных сред описывается уравнениями, подобными не уравнениям объекта, а некоторым другим уравнениям, эквивалентным первым в отношении получаемых результатов. Необходимость в применении квазианалоговых вычислительных сред возникает тогда, когда нельзя построить устройства прямой аналогии, содержащие аналоговую вычислительную среду.

Квазианалоговые вычислительные среды можно подразделить на две группы.

В первую группу входят вычислительные среды, с помощью которых можно построить для заданных уравнений моделирующее устройство без обратных связей. Ввод в них известной информации позволяет непосредственно получить искомые величины, состоящие в общем случае из основных, соответствующих исходным уравнениям моделируемого объекта, и вспомогательных, получающихся вследствие моделирования согласно общему определению квазианалоговых вычислительных сред не заданных, а расширенных эквивалентных уравнений.

Во вторую группу входят такие квазианалоговые вычислительные среды, которые являются решающей частью моделирующих устройств, имеющих обратные связи, и служат для отработки необходимых управляющих величин с тем, чтобы выполнялись условия эквивалентности уравнений объекта и уравнений, описывающих состояние квазианалоговой вычислительной среды.

Процесс подбора управляющих величин называется уравновешиванием вычислительной среды. В связи с этим вычислительные среды первой группы можно назвать неуравновешиваемыми, а второй — уравновешиваемыми или управляемыми.

Квазианалоговая модель, построенная на основе уравновешиваемой решающей среды, структурно подразделяется на две основные части: квазианалог, являющийся собственно моделью (в качестве его применяется уравновешиваемая квазианалоговая вычислительная среда) и устройство управления, служащее для уравновешивания квазианалога. Устройство управления квазианалогом может быть выполнено в виде преобразователя, который является некоторой средой направленного действия, пропускающей сигналы лишь в определенных направлениях. Однако в некоторых случаях его удобнее выполнить в виде обычной схемы.

3. Моделирующие устройства и их отдельные звенья представляют по существу системы, предназначенные для преобразования информации по заданным математическим законам.

При рассмотрении квазианалоговых вычислительных сред ограничимся случаем, когда математические связи между вектором

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)' \qquad (1)$$

и вектором

$$f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)' \qquad (2)$$

(знак $'$ означает транспонирование) имеют вид

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= f_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= f_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= f_m, \end{aligned} \qquad (3)$$

или короче

$$Ax = f. \qquad (4)$$

Здесь $a_{ij}$, вообще говоря, могут быть нелинейными дифференциальными операторами, т. е.

$$a_{ij} = a_{ij}(x_1, x_2, \ldots, x_n, p), \qquad (5)$$

где $p = \frac{d}{dt}$. Правые части (3) являются заданными функциями времени.

В настоящее время известен целый ряд методов построения квазианалоговых вычислительных устройств. Рассмотрим некоторые из них для случаев, когда в качестве квазианалога и устройства уравновешивания используется вычислительная среда.

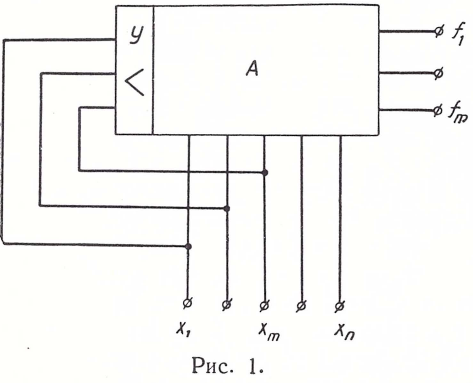



Рис. 1.

4. Альфа-аналоговый метод состоит в том, что сначала составляется модель заданных уравнений (4) с невязками ε, т. е.

$$Ax = f + \varepsilon, \qquad (6)$$

а затем вектор ε обращается в нулевой путем пропорционального преобразования его в вектор $\boldsymbol{x}$ согласно уравнению

$$\boldsymbol{x} = -k\varepsilon. \qquad (7)$$

При $k \to \infty$ уравнения (6) и (7) эквивалентны (4).

Схема альфа-аналоговой моделирующей среды, используемой в качестве квазиобратимого преобразователя, приведена на рис. 1 (вектор ε на рисунке не показан).

Часть $A$ вычислительной среды представляет собой реализацию на твердом теле матричной схемы, изображенной на рис. 2, *а*. В простейших случаях звенья $a_{ij}$ этой схемы могут быть линейными двухполюсниками или диодными схемами. Часть вычислительной среды обладает направленными свойствами и реализует на твердом теле устройство уравновешивания, представляющее собой в данном случае группу из $m$ отрабатывающих усилителей (рис. 2, *б*) с большим по модулю отрицательным коэффициентом усиления.

5. Ро-аналоговый метод основан на применении обратимых решающих устройств [5]. На рис. 3 изображена обратимая ро-аналоговая вычислительная среда. Она состоит из трех областей, две из которых представляют собой интегральные схемы, соответствующие матричной схеме (рис. 2, *а*). Третья область является направленной и служит для уравновешивания. Она должна быть

эквивалентна $m$ отрабатывающим усилителям. Внешние полюсы матричных схем $A$ соединяются между собой и служат для задания

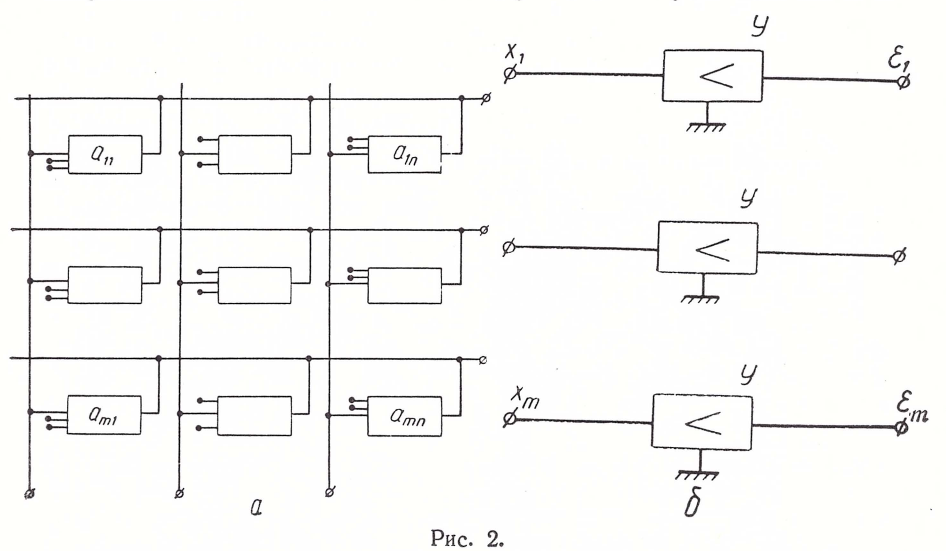



Рис. 2.

и получения напряжений, моделирующих компоненты вектора $\boldsymbol{x}$. При задании напряжений на $n - m$ полюсах на $m$ свободных полюсах получаются напряжения, соответствующие уравнению (4).

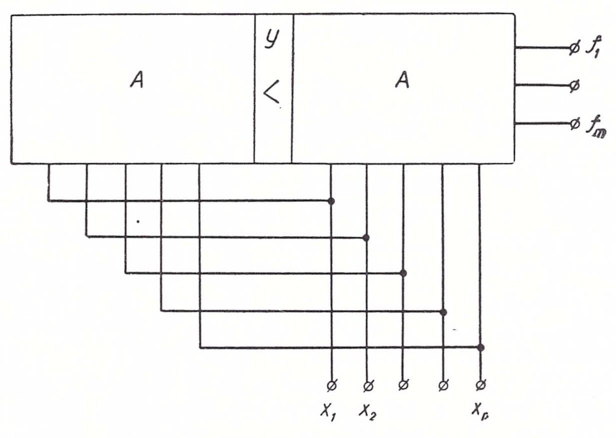



Рис. 3.

6. На рис. 4 изображена модель плоской задачи теории упругости, состоящая из жестко соединенных между собой интегральных схем первого и второго типов. Этим интегральным схемам соответствуют принципиальные схемы, изображенные на рис. 5 и

6. Для уравновешивания модели между соответственными узлами $\varepsilon_i - u_i$ и $\eta_i - v_i$ включаются отрабатывающие усилители, которые рационально выполнять тоже в виде интегральных схем.

Напряжения $u_i$ и $v_i$ моделируют перемещения, а токи $\sigma_x$, $\sigma_y$, $\tau_{xy}$, $\tau_{yx}$ — нормальные и касательные напряжения. Эти величины в предельном случае, когда шаг $h \to 0$, будут связаны следующей системой дифференциальных уравнений в частных производных [6]:

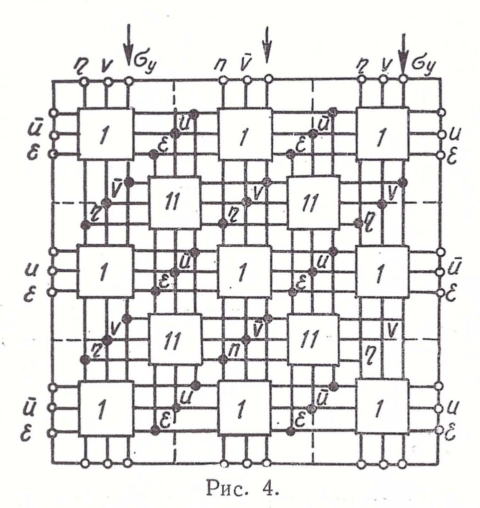


Рис. 4.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0,$$

$$\sigma_x = (\lambda + 2\nu)\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\sigma_y = (\lambda + 2\nu)\frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \nu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Проводимости $a$, $b$ и $c$ на рис. 5 и 6 связаны с коэффициентами системы (8) следующим образом:

$$a = \frac{\lambda + 2\nu}{h}, \quad b = \frac{\lambda}{h}, \quad c = \frac{\nu}{h},$$

если масштабные коэффициенты считать равными единице.

Применительно к различным задачам будут изменяться лишь форма области и краевые условия.

Остановимся на одном весьма перспективном варианте метода квазианалогий, названном методом динамического моделирования. Этот метод позволяет строить моделирующие математические машины с малым числом однотипных блоков и автоматизировать ввод исходных данных.

Динамическими электронными моделями [7—9] были названы такие модели, в которых желаемое распределение напряжений и токов получается путем циклического переключения какого-либо элемента с постоянными или переменными параметрами, в общем случае многополюсного. Динамическая модель должна состоять из двух частей, из которых одна может иметь переменные, а другая постоянные параметры. Эти две части циклически пересоединяются между собой при помощи специального коммутатора. Таким образом, динамическая модель представляет собой цепь переменной структуры, в которой напряжения с допустимой для практики

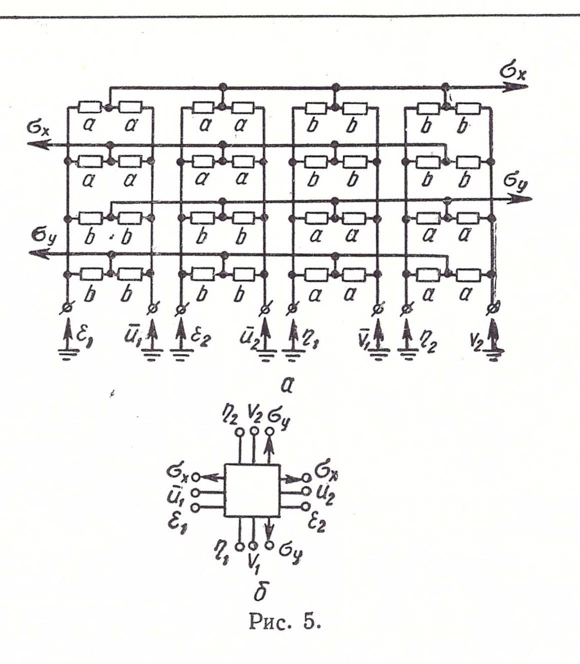



Рис. 5.

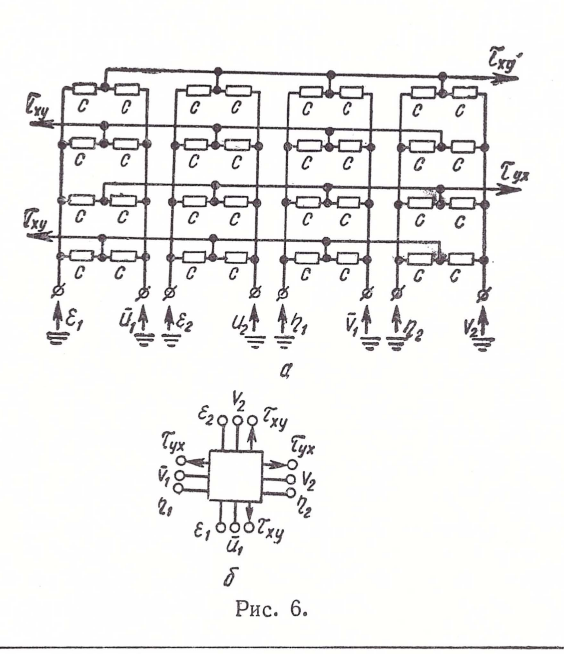



Рис. 6.

методической погрешностью моделируют неизвестные заданной системы уравнений.

Развитие интегральной схемотехники, которая в недалеком будущем получит широкое распространение, позволяет надеяться, что динамические моделирующие устройства смогут быть построены на базе твердых интегральных схем. Это означает, что можно создавать динамическую квазианалоговую вычислительную среду и на ее основе различные моделирующие математические машины, обладающие малыми габаритами и потребляемой энергией, большой надежностью и механической прочностью.

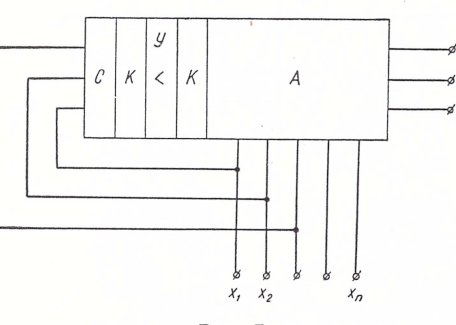



Рис. 7.

Схема динамической альфа-аналоговой вычислительной среды изображена на рис. 7. Она состоит из собственно моделирующей части $A$, являющейся квазианалогом моделируемой системы уравнений и переключаемой при помощи автоматически работающих коммутаторов К, уравновешивающей части У, которая в данном случае является интегральной схемой отрабатывающего усилителя.

Ро-аналоговая обратимая динамическая вычислительная среда (рис. 8) отличается от только что рассмотренной наличием двух моделирующих областей $A$. Это необходимо для того, чтобы устройство обладало свойством обратимости в том смысле, что при задании на любых $n-m$ его внешних полюсах некоторых величин, на остальных $m$ полюсах отрабатываются величины, удовлетворяющие заданной системе уравнений. Кроме того, при наличии двух моделирующих областей $A$ в случае конечных уравнений моделирующее устройство будет обладать абсолютной устойчивостью.

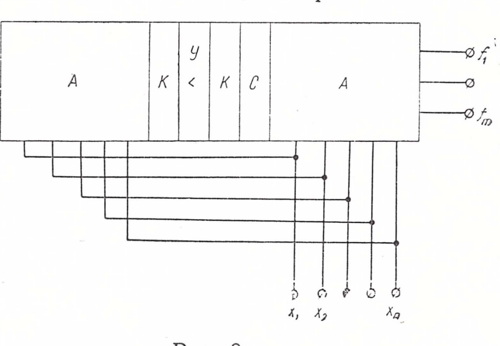



Рис. 8.

Динамические вычислительные среды нуждаются в устройствах для запоминания отрабатываемых в процессе циклического изменения структуры среды величин. Таким устройством может являться

система емкостных элементов, выполненных на твердом теле На рис. 7 и 8 она обозначена буквой $C$.

8. Недостатком аналоговых и квазианалоговых вычислительных сред является трудность изменения их параметров в зависимости от коэффициентов моделируемых уравнений. С помощью метода динамического моделирования можно преодолеть это и даже автоматизировать ввод исходных данных в модель. С этой целью циклически переключаемая двухполюсная или многополюсная интегральная схема должна выполняться со ступенчато-переменными кодоуправляемыми параметрами, а в соответствующих точках неизменяемой части вычислительной среды должны быть элементы, запоминающие напряжение. В качестве примера на рис. 9 изображена схема модели, предназначенной для моделирования безынерционных объектов с переключаемым кодоуправляемым активным двухполюсником. Ее аналог на твердом теле изображен на рис. 10.

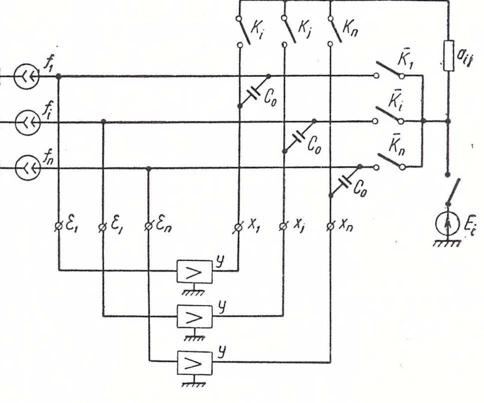


Рис. 9.

Рис. 10.

9. На основании сказанного можно сделать заключение, что аналоговые и динамические квазианалоговые вычислительные среды в ближайшее время смогут быть положены в основу построения различных специализированных моделирующих математических машин и устройств. Сюда можно отнести машины для решения дифференциальных уравнений в обыкновенных и частных производных, задач математического программирования и теории игр, сетевого планирования и управления и ряда других задач.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Даммер Дж. У. А., Грэнвилл Дж. У. Миниатюризация и микромпиатюризация радиоэлектронной аппаратуры. «Мир», М., 1965.

2. Карплюс У. Моделирующие устройства для решения задач теории поля. ИЛ, 1962.

3. Тарапон А. Г., Уласович М. Н.— В кн:. Некоторые вопросы прикладной математики и аналоговой вычислительной техники. Вып. 2. «Наукова думка», К., 1966.

4. Пухов Г. Е. Избранные вопросы теории математических машин. Изд-во АН УССР, К., 1964.

5. Пухов Г. Е., Борковский Б. А. — В кн.: Математическое моделирование и электрические цепи. Вып. II. «Наукова думка», К., 1964.

6. Пухов Г. Е., Васильев В. В., Степанов А. Е., Токарева О. Н. Электрическое моделирование задач строительной механики. Изд-во АН УССР, К., 1963.

7. Пухов Г. Е.— Кибернетика, 1965, 2.

8. Борковский Б. А. — Кибернетика, 1965. 3.

9. Борковский Б. А., Пухов Г. Е.— В кн.: Математическое моделирование и электрические цепи. Вып. IV. «Наукова думка», К., 1966.

Рассмотрено на семинаре
1 апреля 1966 г.

# О ВОЗМОЖНОСТИ УЛУЧШЕНИЯ РЕЖИМА РАБОТЫ УСИЛИТЕЛЕЙ В ОБРАТИМЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ МОДЕЛЯХ

Г. Е. ПУХОВ

1. Как известно [1], одним из недостатков обратимых решающих элементов является значительное отличие уровней рабочих напряжений и напряжений на выходах отрабатывающих усилителей. Это приводит к потере точности моделирования соответствующих математических зависимостей из-за низких уровней рабочих напряжений. Наличие напряжений таких уровней объясняется тем, что выход каждого из усилителей в схемах обратимых решающих элементов присоединяется не к одному двухполюснику как в необратимых элементах, а к нескольким, вследствие чего на выходе усилителя появляется соответственно увеличенный ток. Рассмотрим, например, схему обратимого операционного усилителя (рис. 1). Выход отрабатывающего электронного усилителя У, имеющего большой отрицательный коэффициент усиления, присоединяется к $n$ вспомогательным двухполюсникам с проводимостями $\overline{Y}_1, \ldots, \overline{Y}_n$.

Напомним, что основные двухполюсники с проводимостями $Y_1, \ldots Y_n$, присоединяемые ко входу усилителя, служат для реализации требуемых математических зависимостей между напряжениями $x_1, \ldots, x_n$.

Ниже рассматривается метод улучшения режима работы отрабатывающих усилителей в обратимых моделях, основанный на возможности уменьшения тока усилителя путем поочередного присоединения его выхода к вспомогательным двухполюсникам.

Для простоты изложения рассмотрим этот метод на примере обратимого сумматора, для которого проводимости основных двухполюсников $Y_1, \ldots, Y_n$ и вспомогательных $\overline{Y}_1, \ldots, \overline{Y}_n$ являются чисто омическими и связаны между собою выражениями

$$\overline{Y}_k = mY_k, \; k = 1, \ldots, n, \qquad (1)$$

где $m$ — постоянный коэффициент.

2. Способ реализации предлагаемого метода построения обратимых решающих элементов применительно к схеме обратимого

сумматора показан на рис. 2. Ключи $K_1$, ..., $K_n$ служат для поочередного присоединения выхода отрабатывающего усилителя У к внешним полюсам вспомогательных двухполюсников, а конденсаторы $C_0$ — для запоминания получающихся напряжений. Легко видеть, что данная схема обратимого сумматора соответствует принципу построения электронных моделирующих устройств, который называется динамическим [2—5].

Рассматривая работу схемы, можно сделать вывод, что ток $i_д$ на выходе усилителя У в динамическом сумматоре должен быть

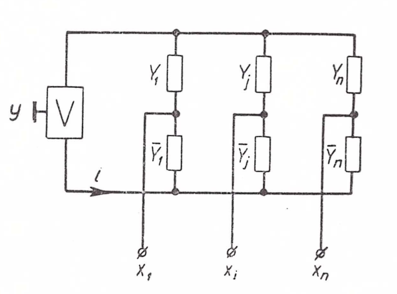



Рис. 1. Обратимый операционный усилитель.

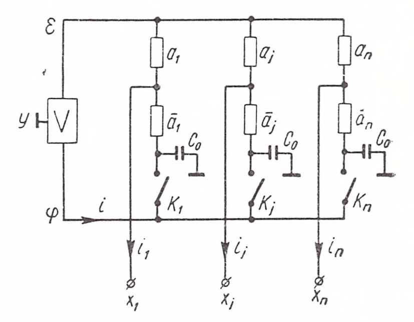



Рис. 2. Обратимый сумматор с переключаемым обрабатывающим усилителем.

меньше тока $i$ в обычном обратимом сумматоре из-за того, что в каждый данный момент к выходу усилителя в схеме рис. 2 присоединяется только один вспомогательный двухполюсник.

Отношение

$$D = \frac{i_д}{i}, \tag{2}$$

показывающее во сколько раз уменьшается ток на выходе отрабатывающего усилителя при переходе к динамическому режиму, далее называется коэффициентом уменьшения тока.

3. Определим величину $D$ для обратимого сумматора в предположении, что напряжение на $k$-ом полюсе получается, а напряжения на всех остальных полюсах являются задающими и что ток этого полюса имеет нулевое значение ($i_k = 0$).

Из схем рис. 1 и 2 легко получить для токов усилителей в установившемся режиме следующие выражения:

$$i = \left[\left(1 + \frac{a_k}{\bar{a}_k}\right)\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_j\right] x_k, \tag{3}$$

$$i_д = a_k x_k, \tag{4}$$

если предположить, что напряжения $x_1$, ..., $x_n$ — постоянны.

Отсюда

$$D_k = \frac{a_k}{\left(1 + \frac{1}{m}\right)\sum_{j=1}^{n} a_j}, \tag{5}$$

так как по условию $\frac{\bar{a}_k}{a_k} = m.$

В обратимых электронных моделях обратимые сумматоры часто находятся в таком режиме [1], при котором трудно установить, какие из его полюсов являются входными и выходными. В этом случае естественно считать все полюсы равноправными и в качестве коэффициента уменьшения тока принимать величину

$$\bar{D} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} D_k. \tag{6}$$

Подставляя сюда выражения (5), получим

$$\bar{D} = \frac{m}{(1+m)\,n}. \tag{7}$$

Таким образом, средний коэффициент уменьшения тока на выходе отрабатывающего усилителя при переходе от обычной схемы обратимого сумматора к динамической определяется числом полюсов $n$ и отношением $m$ проводимостей вспомогательных и основных двухполюсников.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пухов Г. Е. Избранные вопросы теории математических машин. Изд-во АН УССР, К., 1964.
2. Пухов Г. Е.— Кибернетика, 1966, 2.
3. Борковский Б. А.— Кибернетика, 1966, 3.
4. Борковский Б. А.— Кибернетика, 1966, 6.
5. Пухов Г. Е., Борковский Б. А. — Кибернетика, 1966, 6.

Рассмотрено на семинаре
24 июня 1966 г.

# ДИНАМИЧЕСКИЙ ОБРАТИМЫЙ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАТОР

А. Ф. КАТКОВ

На практике широко применяются электронные необратимые моделирующие устройства. Основным недостатком их является неравноправие входных и выходных полюсов. Особенно это сказывается при решении одной и той же системы уравнений относительно различных групп переменных. Применение необратимых моделей приводит к необходимости каждый раз заново подготавливать систему уравнений к набору, что сопряжено с большими, а иногда и непреодолимыми математическими трудностями. В работах [1—3] изложены методы, позволяющие строить модели, которые обладают свойством обратимости — обратимые и квазиобратимые моделирующие устройства. Входные и выходные полюсы в этих устройствах можно выбирать произвольно: в обратимых — без какой-либо коммутации, в квазиобратимых — при помощи простых ключевых схем.

Обычно в необратимых, обратимых и квазиобратимых моделях все отрабатывающие усилители остаются присоединенными к квазианалоговой части цепи в течение всего времени решения задачи. Количество усилителей равно числу потенциально-нулевых точек, которые необходимо получить. В работе [4] для уменьшения необходимого количества отрабатывающих усилителей предложен последовательный способ образования потенциально-нулевых точек, названный методом динамического моделирования. Сущность этого метода заключается в том, что в электронной модели объекта, построенной по известным принципам, удаляются все усилители, а в те точки, к которым были присоединены их выходы, включаются конденсаторы. Далее при помощи переключаемого усилителя осуществляется процесс последовательной отработки потенциально-нулевых точек. В работах [5, 6] рассматривался вопрос о методических погрешностях необратимых динамических решающих элементов и их предельных возможностях.

Описанный метод, как указывалось в работе [4], может быть также применен для построения обратимых моделей, состоящих из обратимых сумматоров и интегро-дифференциаторов.

Рассмотрим работу динамического обратимого интегро-дифференциатора. При анализе его работы предположим следующее:

а) проводимость закрытых ключей $К_1$ и $К_0$ равна нулю, а их проводимость в открытом состоянии является достаточно большой величиной;

б) длительность отработки одной потенциально-нулевой точки равна $h$, а так как один переключаемый усилитель уравновешивает две точки, то длительность одного цикла уравновешивания равняется $2h$;

в) выходная проводимость отрабатывающего усилителя настолько большая, что временем заряда конденсатора $C_0$, подключенного к его выходу, можно пренебречь по сравнению с $h$;

г) коэффициент усиления усилителя в режиме холостого хода отрицателен и достаточно велик по абсолютной величине;

д) внешняя нагрузка динамического обратимого элемента такова, что током, который она потребляет, можно пренебречь;

е) величина емкости конденсатора $C_0$ настолько велика, что напряжение на нем за время $h$, когда усилитель отключается, практически не изменяется;

ж) рассматриваемые функции на интервале $h$ являются непрерывными и имеют малые производные.

Рассматривать работу динамического интегро-дифференциатора, схема которого приведена на рисунке (*а*), удобно в два этапа: усилитель подключен $(0 \leqslant t \leqslant h)$ и отключен $(h \leqslant t \leqslant 2h)$. Сначала рассмотрим режим интегрирования, когда полюс 2 является входным. Тогда в конце первого интервала $(t = h)$ получим

$$U_c(h) = U_1(h) = -\frac{1}{RC}\int_0^h U_2(t)\,dt,$$

$$U_0(h) = -\frac{1}{RC}\int_0^h U_2(t)\,dt - U_2(h),$$

полагая $U_c(0) = 0$.

На втором интервале, когда усилитель отключен, состояние цепи описывается таким дифференциальным уравнением:

$$\frac{dU_c}{dt} + \frac{1}{2RC} U_c = -\frac{1}{2RC} U_2(t) + \frac{1}{2RC} U_0(h). \tag{1}$$

Решение этого уравнения можно записать в общем виде [7]

$$U_c(t) = -\frac{1}{RC} e^{-\frac{t-h}{2RC}} \int_0^h U_2(t)\, dt - \int_h^t e^{-\frac{t-t_1}{2RC}} \left[ \frac{1}{2RC} U_2(t_1) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2RC} U_0(h) \right] dt_1 .$$

После ряда преобразований решение уравнения (1) приводится к такому виду:

$$U_c(t) = -\frac{1}{RC} \int_0^h U_2(t)\, dt - \frac{1}{2RC} \int_h^t e^{-\frac{t-t_1}{2RC}} U_2(t_1)\, dt_1 - U_2(h)\left(1 - e^{-\frac{t-h}{2RC}}\right).$$

Если далее разложить экспоненциальную функцию в ряд Тейлора, то с точностью до нелинейных членов разложения получим

$$U_c(2h) = -\frac{1}{RC} \int_0^h U_2(t)\, dt - \frac{1}{2RC} \int_h^{2h} U_2(t_1)\, dt_1 -$$

$$- \frac{h}{2RC} U_2(h) + \frac{h}{2R^2C^2} \int_h^{2h} U_2(t_1)\, dt_1 .$$

Два последних члена определяют погрешность интегрирования входного напряжения на конденсаторе $C$ в течение времени, когда усилитель отключен. Чтобы оценить величину этой погрешности, представим входную функцию в виде ряда и рассмотрим только его линейные члены. Тогда можно показать, что погрешность интегрирования

$$\delta = \frac{1}{2RC} \int_h^{2h} U_2(t_1)\, dt_1 + \frac{h}{2R^2C^2} \int_h^{2h} U_2(t_1)\, dt_1 - \frac{h}{2RC} U_2(h)$$

имеет следующий вид:

$$\delta = \frac{h}{2R^2C^2} \int_h^{2h} U_2(t_1)\, dt_1 + \frac{h^2}{2R^2C^2} U_2(2h).$$

Так как $h \ll RC$, то погрешность $\delta$ имеет незначительную величину и уменьшается при уменьшении $h$. Напряжение на по-

люсе 1 динамического интегро-дифференциатора на интервале $h \leqslant \leqslant t < 2h$ запишется так:

$$U_1(2h) = -\frac{1}{RC}\int_0^h U_2(t)\,dt - \frac{h}{2RC}U_2(h) \qquad (2)$$

Графически результаты анализа представлены на рисунке (*б*). Из соотношения (2) следует, что при отключенном усилителе напряжение на полюсе 1 изменяется так, как будто интегрирование происходит с постоянной времени, в два раза большей, чем на интервале $0 \leqslant t \leqslant h$. Когда усилитель подключается ($t = 2h$), напряжение $U_1(t)$, если положить $\delta = 0$, определяется формулой

$$U_1(2h) = -\frac{1}{RC}\int_0^h U_2(t)\,dt - \frac{1}{RC}\int_h^{2h} U_2(t_1)\,dt_1 .$$

Обратимый интегро-дифференциатор будет работать в режиме дифференцирования, когда полюс 1 является входным, а полюс 2 — выходным. Полагая, что на первом интервале усилитель подключен, получим

$$U_2(h) = -RCU_1'(h),$$
$$U_0(h) = -2RCU_1'(h).$$

При отключенном усилителе для полученной цепи можно составить дифференциальное уравнение

$$\frac{dU_c}{dt} + \frac{1}{2RC}U_2(t) = \frac{1}{2RC}U_1(t) + U_1'(h),$$

решение которого имеет вид

$$U_c(t) = U_1(h)\,e^{-\frac{t-h}{2RC}} + \int_h^t e^{-\frac{t-t_1}{2RC}}\left[\frac{1}{2RC}U_1(t_1) + U_1'(h)\right]dt_1 .$$

Теперь находим напряжение на выходном полюсе:

$$U_2(t) = -2RCU_1'(h) - \frac{U_1(h)}{2}e^{-\frac{t-h}{2RC}} + RCU_1'(h)\,e^{-\frac{t-h}{2RC}} -$$
$$-\frac{1}{4RC}\int_h^t e^{-\frac{t-h}{2RC}}U_1(t_1)\,dt_1 + \frac{U_1(t)}{2}. \qquad (3)$$

Разложение экспоненциальной функции в ряд Тейлора с последующим отбрасыванием нелинейных членов позволяет привести (3) к виду

$$U_2(t) = -U_1'(h) - \frac{U_1(h) - U_1(t)}{2} - \frac{U_1(h)}{4}(t-h) -$$
$$-\frac{U_1'(h)}{2}(t-h) - \frac{1}{4}\int_h^t U_1(t_1)\,dt_1, \qquad (4)$$

при $RC = 1$.

Подробно анализировать выражение (4) здесь не будем. Отметим только, что для ряда функций, например $At$, $A(1 - e^{-\alpha t})$, сумма последних четырех членов выражения (4) является пренебрежимо малой величиной. По-видимому, можно с достаточной для практики точностью считать, что для функций, удовлетворяющих условию ж) эта сумма также будет малой (рисунок, *в*).

Таким образом, можно сделать вывод, что методическая погрешность получаемых решений будет тем меньше, чем больше частота переключений усилителя, емкость конденсаторов $C_0$, выходная проводимость усилителя и его коэффициент усиления.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Пухов Г. Е.— Изв. вузов, Электромеханика, 1963, 2.
2. Пухов Г. Е. Избранные вопросы теории математических машин. Изд-во АН УССР, К., 1964.
3. Пухов Г. Е., Борковский Б. А.— В кн.: Математическое моделирование и электрические цепи. Вып. 2. «Наукова думка», К., 1964.
4. Пухов Г. Е.— Кибернетика, 1965, 2.
5. Борковский Б. А. — Кибернетика, 1965, 3.
6. Пухов Г. Е., Борковский Б. А.— Кибернетика, 1965, 6.
7. Беллман Р. Теория устойчивости решения дифференциальных уравнений. ИЛ, М., 1954.



Доложено на семинаре
15 апреля 1966 г.

# НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ РАБОТЫ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

А. А. ТЮТИН

1. В настоящей работе рассматриваются динамические модели с переключаемым отрабатывающим усилителем для последовательного образования потенциально-нулевых точек [1]. Метод динамического моделирования алгебраических и дифференциальных уравнений с использованием отрабатывающего усилителя описан в работах [2, 3]. Модели такого типа состоят из квазианалога моделируемой системы уравнений, коммутирующих ключей, отрабатывающего усилителя и устройства управления. Ключи и усилитель образуют устройство уравновешивания квазианалога. В дальнейшем будет показано, что для уравновешивания квазианалога можно также использовать двухпозиционные устройства (типа усилителя с релейным выходом [4] и некоторые другие).

2. Рассмотрим вначале особенности работы динамических моделей. Известно, что процесс уравновешивания в таких моделях организован так, что в течение цикла уравновешивания длительностью $T$ переключаемый с частотой $f_0$ усилитель отрабатывает $n$ потенциально-нулевых точек, где $n$ — порядок системы моделируемых уравнений. При моделировании алгебраических уравнений каждая $i$-ая потенциально-нулевая точка отрабатывается в течение интервала $h = \frac{T}{n}$ [2]. При моделировании дифференциальных уравнений интервал $h$ делится дополнительно на два такта длительностью $h'$ и $h''$, причем $h' \gg h''$. В течение первого такта усилитель отрабатывает $i$-ую точку, а в течение второго (перед переходом в следующую точку) — все остальные потенциально-нулевые точки [3].

В динамические модели входят запоминающие конденсаторы, подключенные к тем полюсам модели, напряжения на которых моделируют неизвестные величины $x_i$; на $i$-ом запоминающем конденсаторе хранится результат отработки напряжения $x_i$ [1—3].

Кроме того, для динамических моделей, как и для обычных квазианалоговых моделей с уравновешиванием, должно выполнять-

ся условие малости напряжений $\varepsilon_i$ в потенциально-нулевых точках, что достигается за счет большого коэффициента усиления усилителя.

Таким образом, отработка напряжения $\varepsilon_i$ является периодическим процессом (при циклической отработке потенциально-нулевых точек): в течение интервала $h$ связь между напряжениями $\varepsilon_i$ и $x_i$ определяется процессами в замкнутой цепи обратной связи, а в течение интервала $T - h$ — процессами в разомкнутой цепи, так как в это время усилитель отрабатывает другие точки. Для

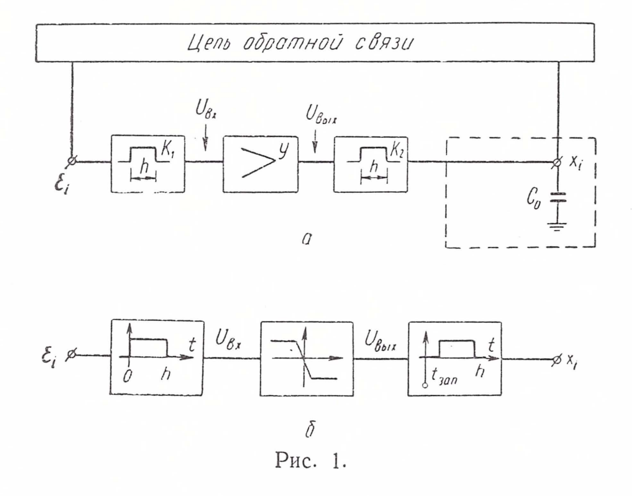



Рис. 1.

пары напряжений $\varepsilon_i$ и $x_i$ динамическую модель можно представить в виде схемы рис. 1, *а*, где $К_1$ и $К_2$ — коммутирующие ключи, У — отрабатывающий усилитель, $C_0$ — запоминающий конденсатор. На интервале $h$ ключи $К_1$ и $К_2$ подключают синхронно усилитель к полюсам ($\varepsilon_i$, $x_i$) модели; напряжение $\varepsilon_i$ отрабатывается до минимума, определяемого величиной коэффициента усиления усилителя; конденсатор $C_0$ заряжается до напряжения $x_i$, т. е. переходный процесс в схеме должен окончиться в пределах интервала $h$. В течение остальной части цикла уравновешивания (на интервале $T - h$) усилитель отключен от полюсов ($\varepsilon_i$, $x_i$); напряжения $\varepsilon_i$ и $x_i$ меняются по некоторому закону, однако, благодаря запоминающим свойствам конденсатора $C_0$, изменение напряжения $x_i$ невелико [1].

Характер переходного процесса на интервале $h$ определяется собственными числами системы дифференциальных уравнений, описывающих состояние цепи. Если наложить условие устойчивой работы динамической модели на каждом интервале (необходимость выполнения этого условия пока что не доказана) и потребовать определенное качество переходного процесса, то можно получить требования к частотным зависимостям модуля и фазы петлевого уси-

ления таким же путем, как это делается в обычных операционных блоках (см., например, работу [5]). При расчете следует учесть большую постоянную времени в выходном каскаде усилителя, появляющуюся из-за влияния запоминающего конденсатора. Так как с уменьшением частоты среза увеличивается время регулирования и время установления переходного процесса, то очевидно, что постоянные времени других каскадов отрабатывающего усилителя и цепи обратной связи, образованной квазианалогом и коммутирующими ключами, должны быть значительно меньше, чем постоянная времени инерционного звена в выходном каскаде усилителя. Учитывая также условие отработки потенциально-нулевой точки в течение интервала $h$, можем сформулировать следующие требования к постоянным времени:

а) постоянная времени инерционного звена на выходе усилителя должна быть меньше длительности интервала уравновешивания:

$$\tau_0 < h; \tag{1}$$

б) постоянная времени усилителя (без учета влияния запоминающего конденсатора) должна быть порядка $\frac{\tau_0}{K_0}$:

$$\tau_{ус} = \frac{\tau_0}{K_0}, \tag{2}$$

где $K_0$ — коэффициент усиления отрабатывающего усилителя;

в) сумма постоянных времени цепи обратной связи и монтажа должна удовлетворять условию:

$$\sum_{(i)} \tau_i \leqslant \tau_{ус}. \tag{3}$$

Следует, конечно, помнить, что эти условия — приближенные, так как получены они в предположении линейной системы.

Из условия (2), однако, следует, что при подключении усилителя к $i$-ой потенциально-нулевой точке из-за наличия инерционного звена на выходе усилителя обратная связь запаздывает и усилитель выходит за пределы линейного участка в область насыщения (рис. 2, *а*). Действительно, если выбрать диапазон линейного изменения выходного напряжения усилителя равным $\pm 100$ *в*, а коэффициент усиления $K_0 = 10\,000$, то максимальное входное напряжение $U_{вх.макс}$, при котором усилитель еще не выходит за пределы линейной области, будет равняться 10 *мв*. Чем больше коэффициент усиления отрабатывающего усилителя, тем точнее выполняется условие эквивалентности квазианалога системе моделируемых уравнений. Следовательно, увеличение коэффициента усиления $K_0$ еще больше сужает пределы изменения входного напряжения и увеличивает вероятность перехода усилителя в режим насыщения в момент его подключения. Поэтому при анализе работы модели необходимо учитывать наличие нелинейности типа насыщения. Можно сказать, что на интервале $h$ ключи, усилитель

и запоминающий конденсатор образуют импульсную систему с нелинейностью типа насыщения и идеальным запаздыванием $t_{зап} \cong \cong \tau_0$ (рис. 1, *б*). Эту идеализированную схему также можно использовать при анализе процесса отработки потенциально-нулевой точки на интервале $h$.

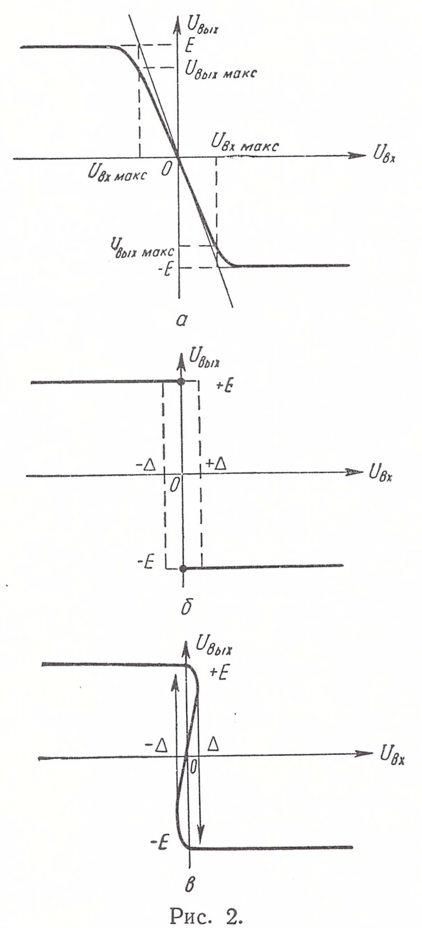


Рис. 2.

Таким образом, особенности работы динамических моделей приводят к тому, что, по крайней мере на части интервала $h$, отрабатывающий усилитель находится в насыщении, а его выходной каскад работает в ключевом режиме заряда запоминающего конденсатора $C_0$. Естественно, что выходной каскад должен быть построен по симметричной схеме, чтобы обеспечивалось одинаковое зарядное сопротивление при любой полярности входного напряжения. Одна из возможных схем такого рода показана на рис. 3, *а*, взятом из работы [6]. Очевидно, что выходной каскад должен обеспечивать зарядный ток

$$i_{зар.макс} = \frac{E}{r_{зар}}; \quad r_{зар} = r + r_{нас},$$

где $r$ — сопротивление открытого коммутирующего выходного ключа; $r_{нас}$ — сопротивление насыщения выходного каскада.

Величина зарядного сопротивления $r_{зар}$ должна подчиняться требованиям, полученным из следующих рассуждений.

Так как выходной каскад отрабатывающего усилителя работает в ключевом режиме и переходный процесс отработки $i$-ой потенциально-нулевой точки должен окончиться в течение $i$-го интервала (условие (1)), то для постоянной времени заряда запоминающего конденсатора можно написать

$$r_{зар}\, C_0 = \alpha h; \quad \alpha \ll 1.$$

В промежутке между интервалами $h$ запоминающий конденсатор должен сохранить заряд, т. е.

$$R_{разр}\, C_0 = \beta\,(T - h); \quad \beta \gg 1.$$

Из этих двух условий получим

$$n = 1 + \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{R_{\text{разр}}}{r_{\text{зар}}}. \qquad (5)$$

Здесь $n$ — количество потенциально-нулевых точек в схеме квазианалога: $R_{\text{разр}}$ — сопротивление цепи, на которое разряжается запоминающий конденсатор в интервале $T - h$.

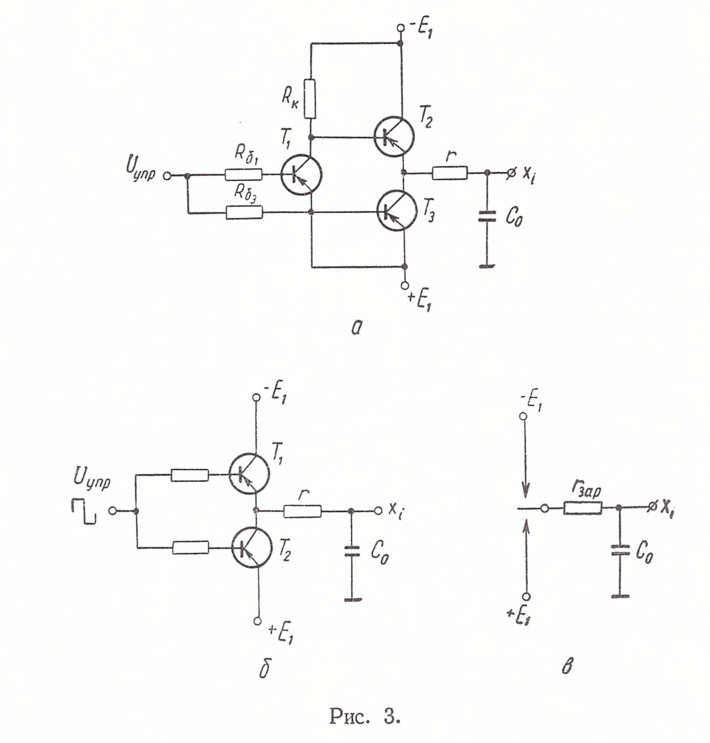



Рис. 3.

Из соотношения (5) следует, что требуемая величина зарядного сопротивления $r_{\text{зар}}$ зависит от числа отрабатываемых точек, величины погрешности операции и величин сопротивлений в схеме квазианалога. Коэффициенты $\alpha$ и $\beta$ должны определяться из анализа погрешности выполнения операции.

Требования к входному сопротивлению отрабатывающего усилителя, его коэффициенту усиления и компенсации дрейфа нуля, не отличаются от требований, предъявляемых к усилителям в обычных квазианалоговых моделях.

Увеличение коэффициента усиления отрабатывающего усилителя можно получить за счет применения внутренней положительной обратной связи (см., например, [7]). При критической величине этой обратной связи устройство имеет ступенчатую амплитудную характеристику (рис. 2, *б*), а при обратной связи больше крити-

ческой — характеристику с петлей гистерезиса (рис. 2, *в*) Последний тип характеристики интересен тем, что усилитель в разомкнутом состоянии неустойчив и ведет себя как триггер, но, будучи охвачен отрицательной обратной связью, работает как решающий усилитель с эквивалентным коэффициентом усиления

$$K_{0.\text{экв}} = \frac{E}{\Delta}, \quad (6)$$

где $\Delta$ — половина ширины зоны гистерезиса.

3. Возможная работа отрабатывающего усилителя в режиме насыщения (выходной каскад — в ключевом режиме) приводит к идее о замене уравновешивающего элемента непрерывного действия, каким является усилитель с характеристикой а), на уравновешивающий элемент релейного типа с характеристикой б) или в). Такие уравновешивающие элементы (УЭ) назовем двухпозиционными первого и второго рода, соответственно. Двухпозиционный УЭ первого рода может быть выполнен либо в виде усилителя с внутренней положительной обратной связью критической величины [7], либо в виде усилителя с релейным выходом [4]. Минимальная величина сигнала ошибки $\varepsilon_i$ в таких устройствах определяется шириной зоны нечувствительности $\Delta$ (рис. 2, *б*). Двухпозиционный УЭ второго рода можно выполнить либо в виде усилителя с внутренней обратной связью, больше критической (собственно, это уже не усилитель, а триггер), либо в виде специального устройства, состоящего из компараторов и триггера [8]. На выходе триггера должен включаться симметричный ключ, либо выход триггера должен выполняться по симметричной схеме, как и выход усилителя в непрерывном УЭ. Одна из возможных схем бесконтактного симметричного ключа показана на рис. 3, *б*.

Процесс отработки потенциально-нулевых точек двухпозиционными УЭ протекает так же, как процесс слежения в двухпозиционных системах автоматического регулирования. Для анализа можно использовать эквивалентную схему ключа (рис. 3, *в*), где $r_{\text{зар}} = r + r_{\text{нас}}$.

Требования к двухпозиционным УЭ можно сформулировать следующим образом:

а) ширина зоны нечувствительности или зоны гистерезиса должна быть не меньше ширины области линейной работы в непрерывных УЭ:

$$\Delta \leqslant U_{\text{вх. макс}}; \quad (7)$$

б) сумма постоянных времени, определяющих скорость переброса схемы из одного состояния в другое, должна быть значительно меньше постоянной времени заряда запоминающего конденсатора:

$$\sum_{(j)} \tau_j \ll r_{\text{зар}} C_0 = \tau_0. \quad (8)$$

Требования к величине входного и зарядного сопротивлений не меняются. Применение двухпозиционных УЭ практически снимает проблему дрейфа в динамических моделях (см. аналогичный вывод в работе [8] для двухпозиционных стабилизаторов напряжения).

4. В заключение рассмотрим возможность использования операционных усилителей постоянного тока (ОУПТ) в качестве переключаемых отрабатывающих усилителей в динамических моделях.

При использовании ОУПТ качество отработки зависит от того, в какой мере характеристики ОУПТ соответствуют указанным выше требованиям. Прежде всего это относится к динамическим свойствам ОУПТ и его поведению в режиме насыщения. Поведение ОУПТ в режиме насыщения должно удовлетворять двум условиям: а) симметричности сопротивления насыщения выходного каскада по отношению к полярности выходного напряжения; б) малости времени выхода усилителя из насыщения (по сравнению с $h$). Первое условие может быть достигнуто путем выбора ОУПТ с симметричным выходным каскадом (типа УУ-2), второе — накладывает ограничения на структуру ОУПТ. Известно, что ОУПТ средней и высокой точности строятся по принципу параллельных каналов с разными постоянными времени. В этом случае время выхода усилителя из насыщения будет определяться наибольшей постоянной времени, которая обычно связана с фильтром на выходе канала М-ДМ. Поэтому, если требуется высокая частота переключения, желательно использовать одноканальные ОУПТ, т. е. без М-ДМ. Но тогда возникает проблема уменьшения дрейфа нуля. Что же касается динамических свойств, то для уменьшения времени переходного процесса необходимо выбирать ОУПТ с высокой частотой среза, которая в одноканальных ОУПТ ограничена условием устойчивой работы. Таким образом, можно сделать вывод, что наиболее подходящим ОУПТ для работы в динамических моделях является одноканальный ОУПТ с симметричным выходом (например, из серии усилителей ЭМУ, разработанных в свое время в Институте автоматики и телемеханики АН СССР). Следует, конечно, учитывать ограниченные возможности таких усилителей при выборе частоты переключения и количества отрабатываемых точек и, если это необходимо, расширять рабочую область частот ОУПТ, учитывая, что роль стабилизирующей цепи может выполнять инерционное звено, связанное с запоминающим конденсатором.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Пухов Г. Е.— Кибернетика, 1965, 2.
2. Борковский Б. А. — Кибернетика, 1965, 3.
3. Борковский Б. А. — Кибернетика, 1965, 6.
4. Самойлов В. Д. — Настоящий сборник, 33.
5. Полонников Д. Е.— В кн.: Вычислительная техника в управлении. «Наука», М., 1964.

6. Лакунин Н. Б. — В кн.: Аналоговая и аналого-цифровая вычислительная техника. «Машиностроение», М., 1964.

7. Тютин А. А. Автореферат кандидатской диссертации. Киевский политехнический институт, 1964.

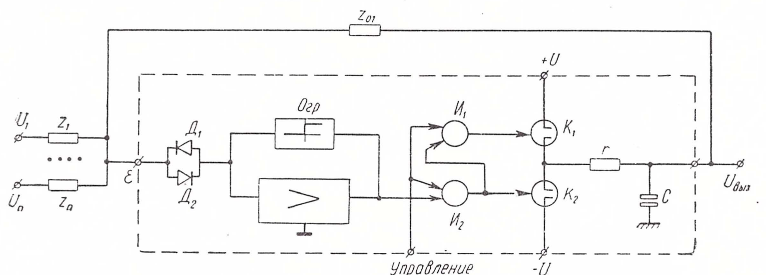
8. Белов В. М. Автореферат кандидатской диссертации. Сибирское отделение АН СССР, Новосибирск, 1966.

Доложено на семинаре
27 мая 1966 г.

# УСИЛИТЕЛЬ С РЕЛЕЙНЫМ ВЫХОДОМ

В. Д. САМОЙЛОВ

При построении динамических моделей возникает необходимость в усилителе с достаточно низким выходным сопротивлением без обратной связи, допускающим работу на большую емкость. Однако хорошие отечественные УПТ (например, усилитель ТУ-10) не допускают подключения на выход большой емкости. Нами предложена и испытана схема усилителя с релейным выходом. В схеме




(рисунок) можно использовать любой хороший усилитель в качестве нуль-органа (НО), управляющего релейным выходом из двух ключей $К_1$ и $К_2$, которые подключаются в зависимости от знака на выходе НО к шинам $+U$ или $-U$. Релейный усилитель работает аналогично обычному операционному усилителю с обратной связью $Z_{о.с}$ и входными комплексными сопротивлениями $Z_1, \ldots, Z_n$. Суммирующая точка релейного усилителя обозначена ε, выход с емкости $C - U_{вых}$. Ключи $К_1$ и $К_2$, управляемые инверторами $И_1$ и $И_2$, в данном случае являются выходным каскадом релейного УПТ.

Релейный выход позволяет:

1) уменьшить выходное сопротивление УПТ в разомкнутом состоянии, что дает возможность более быстро заряжать выходную емкость в динамических моделях;

2) использовать практически любые УПТ в качестве НО;

3) управлять выходным каскадом по дополнительному входу;

4) подключать к одному НО несколько выходных каскадов, т. е. создавать релейный усилитель со многими выходами;

5) увеличить к. п. д. выходного каскада.

Для ослабления высокочастотных колебаний, проникающих с выхода при емкостной обратной связи релейного усилителя, на входе НО подключались диоды $Д_1$ и $Д_2$. В качестве выходных ключей использовались транзисторные ключи с потенциально изолированным от земли управлением [1].

К ключевым транзисторам не предъявлялось особых требований, кроме обеспечения необходимого тока в открытом состоянии и выдерживании в закрытом состоянии напряжения $2U$. Так как каждый ключ коммутирует напряжение только одной полярности, можно ставить по одному транзистору на ключ.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Самойлов В. Д.— В кн.: Математическое моделирование и электрические цепи. Вып. 4. «Наукова думка», К., 1966.

Доложено на семинаре
27 мая 1966 г.

# ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Б. А. БОРКОВСКИЙ, А. Н. ВОЛЛЕРНЕР,
А. Ф. КАТКОВ, В. П. РОМАНЦОВ

При построении аналоговых математических машин обычно использовался метод одновременного получения потенциально-нулевых точек при помощи соответствующего включения отрабатывающих усилителей с большим отрицательным коэффициентом усиления (параллельный метод), количество усилителей должно равняться количеству искомых потенциально-нулевых точек.

В работах [1, 2] изложен последовательный способ отработки потенциально-нулевых точек. Для его реализации необходим усилитель, циклически подключаемый к требуемым точкам электрической цепи. Модели, построенные по такому принципу, относятся к динамическим, так как заданные уравнения и уравнения моделируемые квазианалогом, эквивалентны в режиме периодического изменения ее структуры. На рис. 1 приведен общий вид динамической модели. Как видно из рисунка, последовательное подключение усилителя к требуемым точкам квазианалога *М* осуществляется устройством управления, состоящим из распределительного устройства (РУ) и ключевых ячеек $К_j$ (КЯ).

С целью экспериментального исследования динамических моделей был изготовлен макет для решения систем линейных алгебраических и дифференциальных уравнений * (рис. 2).

Макет состоит из таких основных частей: коммутационных полей для решения дифференциальных и алгебраических уравнений с постоянными коэффициентами до 6-го порядка включительно; одного отрабатывающего усилителя; устройства управления модели; блока запоминающих конденсаторов; пульта управления и контроля; блоков нелинейности типа БН-10; блоков перемножения типа БП-4; источника питания.

Набор задачи осуществляется вилочками и короткими проводниками. Коммутационное поле для решения дифференциальных

---

* В создании макета принимали участие также Н. А. Буяло и Ю. И. Якубчик.

уравнений выполнено по типу наборного поля электронной моделирующей установки МН-7, а для решения систем алгебраических, уравнений — в виде матрицы, в узлах которой включены переменные проводимости, моделирующие коэффициенты системы. Установка величин проводимостей производится с помощью измерительной мостовой схемы. Для этого предусмотрено отключение проводимостей от горизонтальных шин матрицы.

В качестве отрабатывающего усилителя можно использовать различные усилители постоянного тока (в том числе и полупроводниковые).

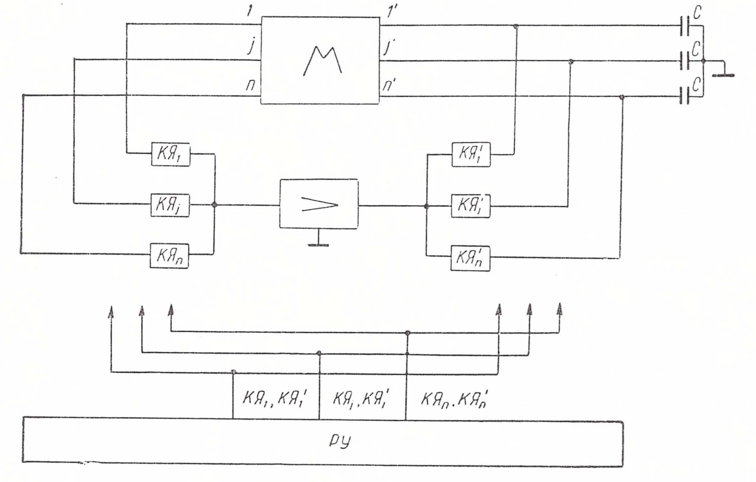



Рис. 1.

В экспериментальных работах, проводимых на макете применялись усилители типа УПТ-4, У-1 и УУ-2. Устройство управления динамических моделей состоит из РУ и КЯ [3]. Распределительное устройство управляет работой КЯ, одновременно подключающих вход и выход отрабатывающего усилителя к соответствующим точкам электрической цепи, удерживая остальные ключи в закрытом состоянии. Такое управление легко выполнить с помощью двоичного счетчика с дешифратором, осуществляющим переключение по кольцу. В основном, при работе с макетом использовалось РУ на элементах потенциальной структуры, однако предусмотрена возможность подключения других типов РУ, построенных на элементах импульсно-потенциальной структуры, четырехслойных диодах (динисторах), многофазных триггерах и др. Ключевые ячейки потенциально развязаны друг от друга по цепи управления и собраны по схеме с симметричным инверсным включением транзисторов. Благодаря симметричному включению транзисторов, ключевая схема может работать при различных полярностях переключаемого напряжения. Влияние управляющей части на комму-

тирующую в такой схеме также сводится к минимуму, так как ток базы протекает только внутри переключателя и не ответвляется в коммутируемые цепи. Потенциальная развязка ключей упрощает построение схем управления. Конструктивно входные и выходные ключи смонтированы на одной плате стандартной ячейки УМШН и имеют общую цепь управления. Подробное описание ключевой ячейки приведено в работе [4].

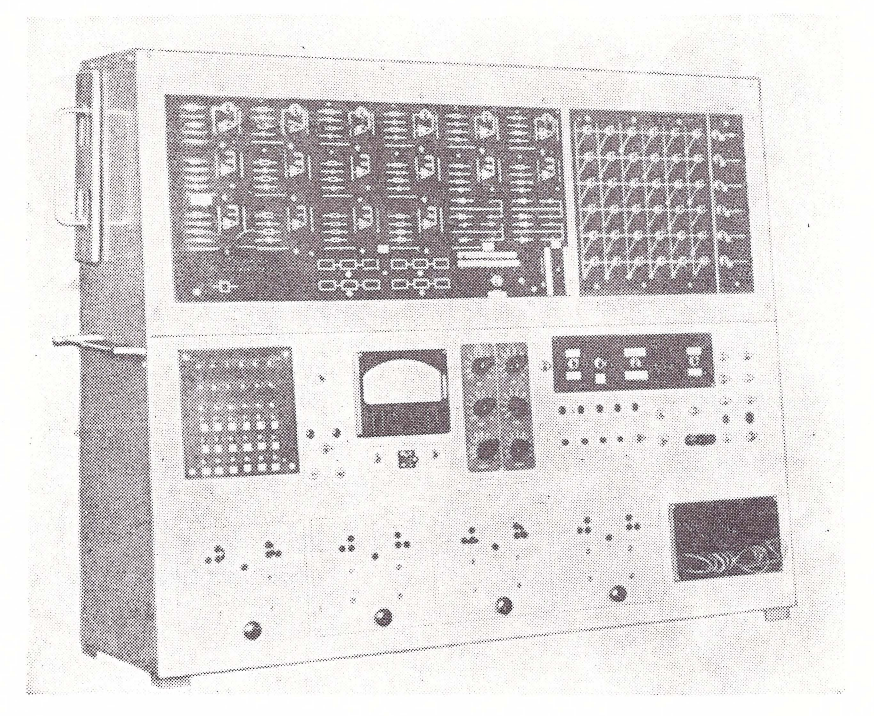


Рис. 2.

Блок запоминающих конденсаторов состоит из 20 конденсаторов типа МБГП-1 (10 *мкф*). Пульт управления и контроля позволяет устанавливать все необходимые режимы работы макета при решении задач, а также регистрировать средние значения напряжений на запоминающих конденсаторах.

На модели производилось:

1) моделирование математических операций;

2) моделирование систем линейных алгебраических уравнений;

3) моделирование линейных дифференциальных уравнений.

При динамическом моделировании математических операций сложения и интегрирования определялась зависимость погрешности выполнения этих операций. Динамический сумматор (интегратор)

на три входа исследовался при суммировании (интегрировании) различных постоянных напряжений. Погрешность суммирования (интегрирования) не превышала 1%. Для оценки повторяемости результатов суммирования и интегрирования каждый опыт повторялся от 10 до 20 раз. Среднеквадратичное отклонение не превышало 1% от величины выходного напряжения.

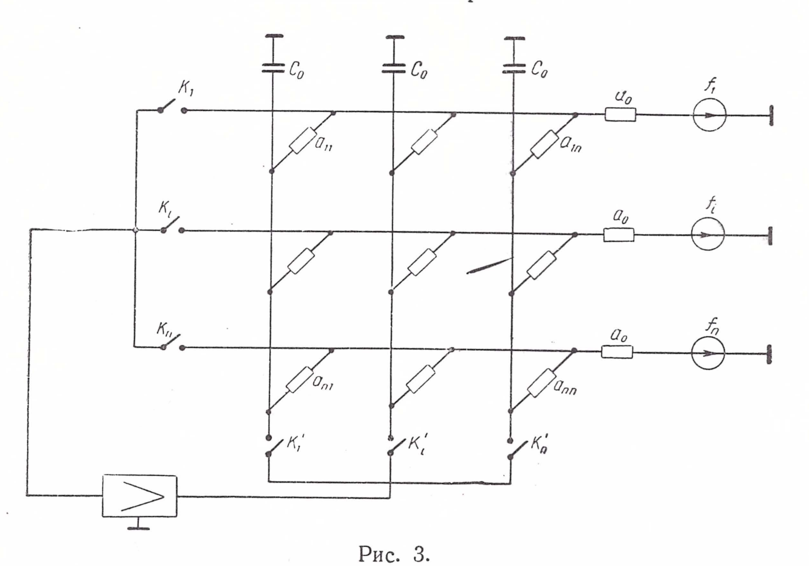



Рис. 3.

На макете решались системы линейных алгебраических уравнений вида

$$a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = a_0 f_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$
$$a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = a_0 f_n,$$

или в матричной форме

$$Ax = a_0 f, \quad (2)$$

где $A$ — неособенная квадратная матрица.

Динамическая модель системы (1) изображена на рис. 3. Проводимости, моделирующие коэффициенты матрицы решаемой системы уравнений, изменялись от сотен килоом до двух-трех мегом. Погрешность решения зависела от порядка решаемых систем уравнений и не превышала 3% для системы уравнений 6-го порядка. В экспериментальные работы по динамическому моделированию дифференциальных уравнений входило решение дифференциальных уравнений до 4-го порядка, для моделирования которых методом параллельного образования потенциально-нулевых точек потребовалось бы шесть отрабатывающих усилителей. Много внимания

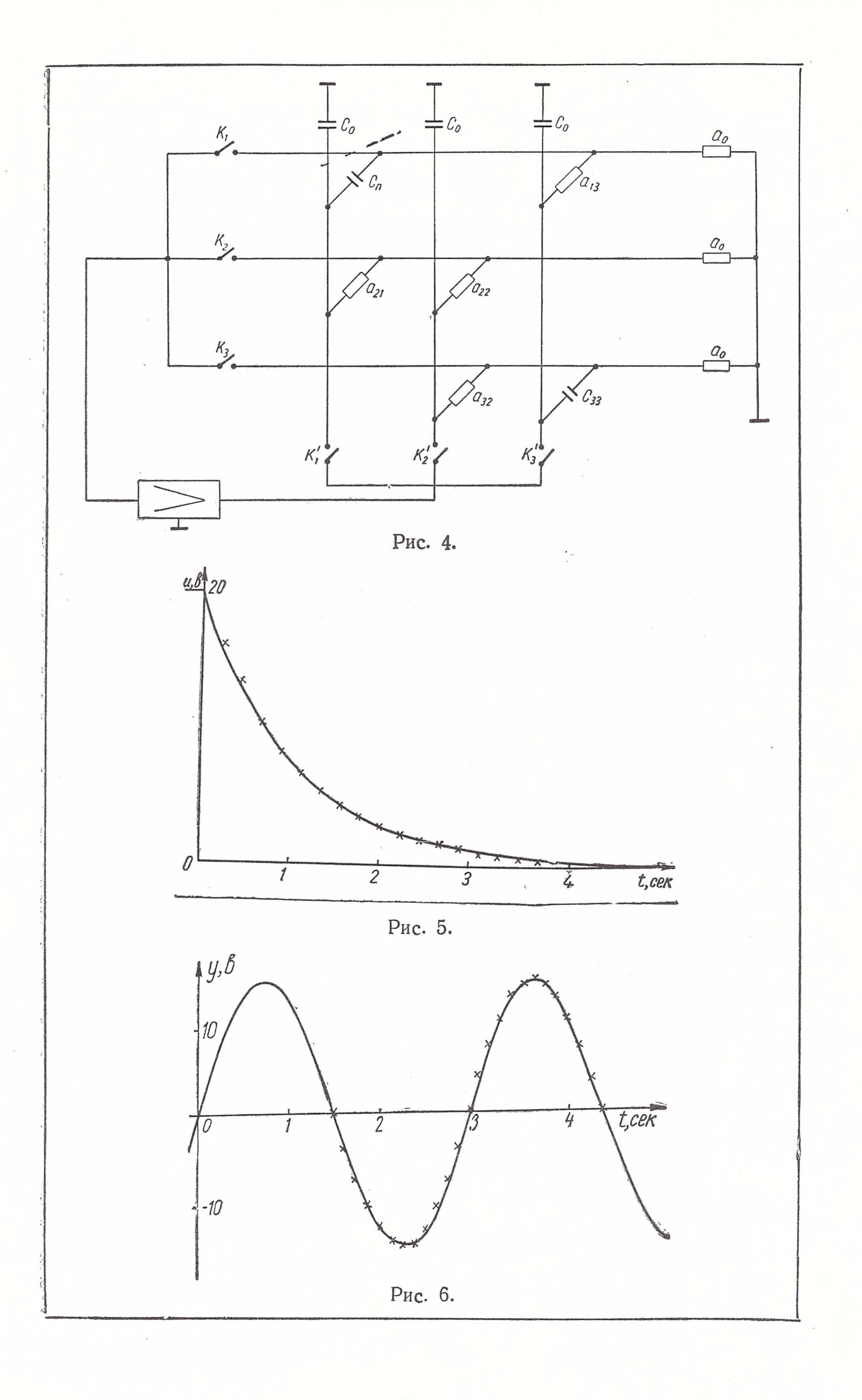



Рис. 4.



Рис. 5.



Рис. 6.

уделялось решению линейных дифференциальных уравнений второго порядка вида

$$a_1 \frac{d^2y}{dt^2} + a_2 y = 0, \qquad (3)$$

динамическая модель которого приведена на рис. 4. Это уравнение характерно тем, что периодический характер решения позволяет исследовать повторяемость решений на модели. Эксперименты на

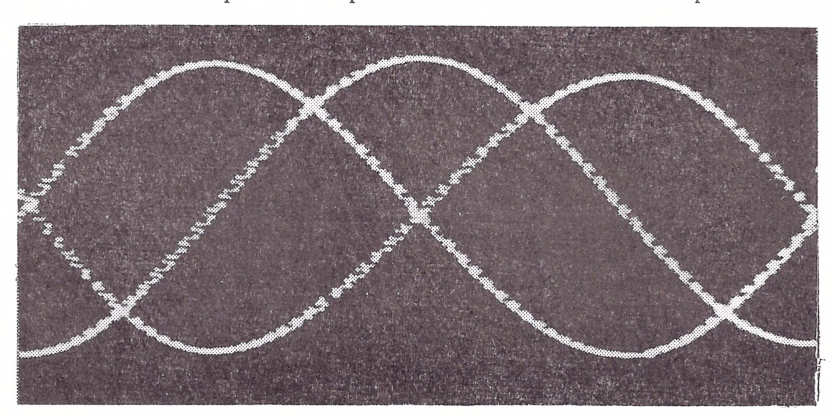


Рис. 7.

макете показали, что воспроизводимость решения у динамических моделей одного порядка с машиной МН-7. Результаты эксперимента по решению дифференциальных уравнений 1-го и 2-го порядка приведены на рис. 5 и 6, где точками отмечено точное значение решения, вычисленное аналитически. На рис. 7 изображена осциллограмма выходного напряжения усилителя при решении уравнения (3). Так как в этом случае усилитель последовательно отрабатывает производную, функцию и ее инверсию, то, наблюдая за напряжением на его выходе, можно следить за всеми тремя кривыми одновременно.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Пухов Г. Е. — Кибернетика. 1965, 2.
2. Борковский Б. А., Пухов Г. Е. — В кн.: Математическое моделирование и электрические цепи. Вып. IV. «Наукова думка», К., 1966.
3. Воллернер А. Н., Катков А. Ф. — В кн.: Труды семинара «Методы математического моделирования и теория электрических цепей». Вып. 2. «Наукова думка», К., 1966.
4. Симак Д. А.— Настоящий сборник, 56.


Рассмотрено на семинаре
27 мая 1966 г.

# К ВОПРОСУ О МОДЕЛИРОВАНИИ УРАВНЕНИЙ В КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЯХ

В. П. РОМАНЦОВ

Часто решение дифференциальных уравнений невозможно получить в явном виде. В таких случаях прибегают к численным методам решения подобных уравнений.

Одним из самых простых численных методов является метод Эйлера, суть которого в приближенной замене искомой интегральной кривой ломаной [1]. Точки излома определяются следующим образом. Отрезок независимой переменной $x$, на котором необходимо определить решение, разбивается на $n$ одинаковых промежутков. Величина $h = x_{i+1} - x_i$ называется шагом разбиения. При достаточно малом шаге можно принять, что на его протяжении производная сохраняет постоянное значение.

Таким образом, если дано дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad \begin{matrix} x = x_0, \\ y = y_0, \end{matrix} \tag{1}$$

то точки излома можно определить по формулам

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hA_0, \\ y_2 &= y_1 + hA_1, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= y_{n-1} + hA_{n-1}, \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$A_i = f(x_i, y_i).$$

В работе [2] был предложен способ построения динамических моделей для решения систем линейных дифференциальных уравнений вида

$$\tau \frac{dx}{dt} + Ax = gf, \tag{3}$$

где $x$ — вектор неизвестных; $A$ — квадратная неособенная матрица; $f$ — вектор правых частей; $g$, $\tau$ — некоторые постоянные.

Модели, в которых отработка потенциально-нулевых точек осуществляется последовательно одним отрабатывающим усилителем, циклически подключаемым к требуемым точкам электрической цепи, относятся к динамическим [3, 4].

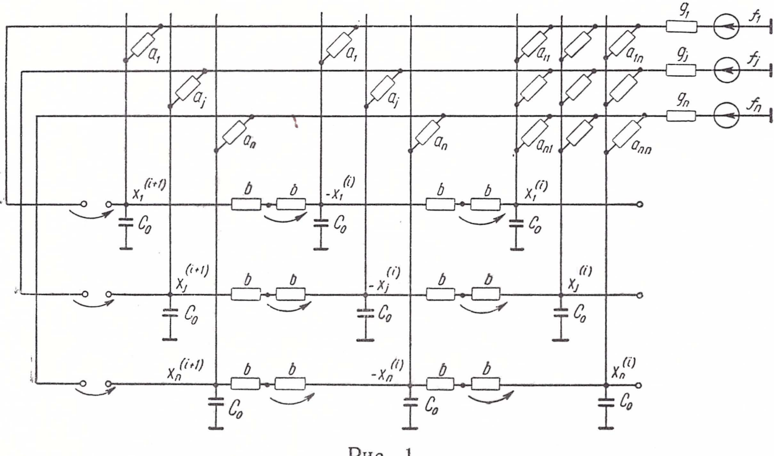



Рис. 1.

Из сказанного выше следует, что систему (3) можно заменить следующей системой разностных уравнений:

$$\frac{\tau}{h} x_{i+1} - \frac{\tau}{h} x_i + Ax_i = gf_i, \qquad (4)$$

где $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ указывает номер шага. Динамическая модель этой системы приведена на рис. 1. Она состоит из матриц омических

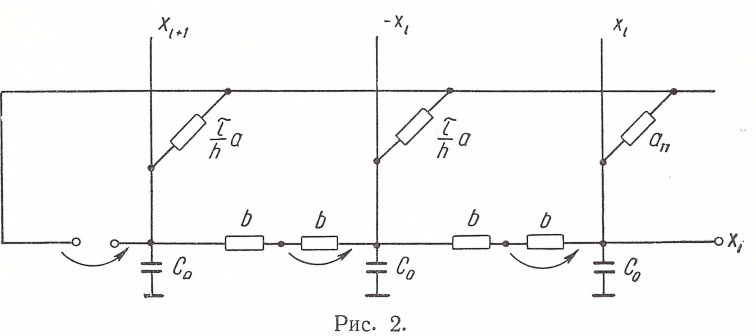



Рис. 2.

проводимостей, запоминающих конденсаторов $C_0$, источников $f_i$ для задания правых частей. В места, отмеченные стрелками, с помощью ключей циклически подключается отрабатывающий усилитель, причем входу усилителя соответствует конец стрелки, а выходу — ее начало.

Для экспериментальной проверки данного способа моделирования были решены некоторые дифференциальные уравнения. Опыты проводились на макете динамической модели алгебраиче-

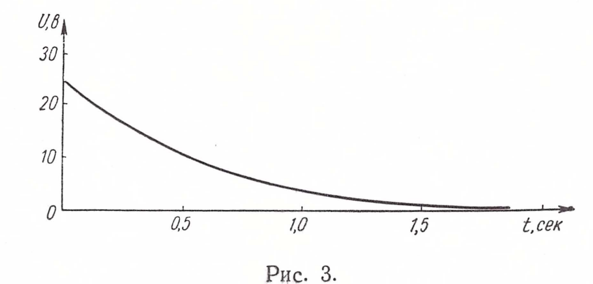



Рис. 3.

ских и дифференциальных уравнений [5]. Решались однородные дифференциальные уравнения первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = -x, \quad x_0 = 1; \tag{5}$$

$$\frac{dx}{dt} = x, \quad x_0 = 1. \tag{6}$$

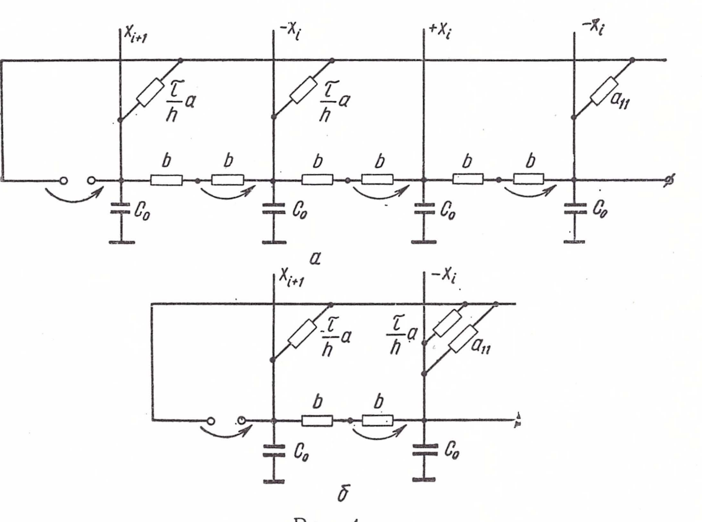



Рис. 4.

Аналитическое решение первого уравнения имеет вид

$$x = e^{-t}, \tag{7}$$

а разностное уравнение записывается так:

$$\frac{1}{h} x_{i+1} - \frac{1}{h} x_i + x_i = 0, \tag{8}$$

где $h$ — величина шага независимой переменной. На рис. 2 показана динамическая модель уравнения (8), аппроксимирующего уравнение (5). Величина проводимостей $\frac{\tau}{h}a$ выбирается в зависимости от желаемой величины шага. Запоминающие конденсаторы $C_0$ должны быть достаточно большими.

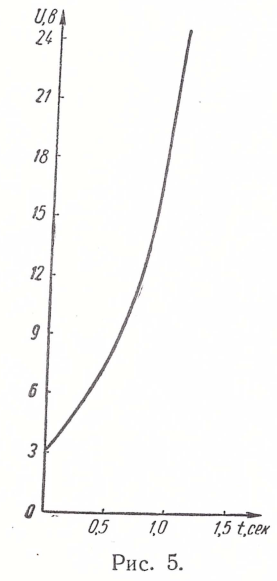


Рис. 5.

Перед началом работы на шины $-x_i$ и $x_i$ необходимо задать напряжения, соответствующие начальному значению $x$. Для этого нужно отрабатывающий усилитель подключить к шине $x_i$, а на шине $-x_i$ задать напряжение, соответствующее значению $-x_0$. Тогда на шине $x_i$ с помощью подключенного к ней усилителя получается напряжение, соответствующее $x_0$.

Алгоритм работы модели состоит в следующем. При подключении усилителя к шине $x_{i+1}$ получается значение $x = x_1$, которое затем используется как исходное для определения точки $x_2$ и т. д. Процесс циклически повторяется. В результате находится искомое решение. Осциллограмма решения уравнения приведена на рис. 3.

Можно показать, что схема модели уравнения (6), построенная по общей схеме (рис. 1), приводится к виду, представленному на рис. 4, *а*. Полученную схему можно упростить (рис. 4, *б*). Аналитическое решение этого уравнения записывается в виде показательной функции $x = e^t$. Осциллограмма решения изображена на рис. 5.

Погрешность решения линейных однородных дифференциальных уравнений на моделях, описанных выше, не превышала 5—10% по отношению к табличным значениям.

ЛИТЕРАТУРА


1. Крылов А. Н. Лекции о приближенных вычислениях. ГИТТЛ, М.—Л., 1950.
2. Пухов Г. Е.— ДАН УРСР, 1966, 8.
3. Пухов Г. Е.— Кибернетика, 1965, 2.
4. Борковский Б. А., Пухов Г. Е. — В. кн.: Математическое моделирование и электрические цепи. Вып. IV. «Наукова думка», К., 1966.
5. Борковский Б. А., Воллернер А. Н., Катков А. Ф., Романцов В. П. — Настоящий сборник, 35.

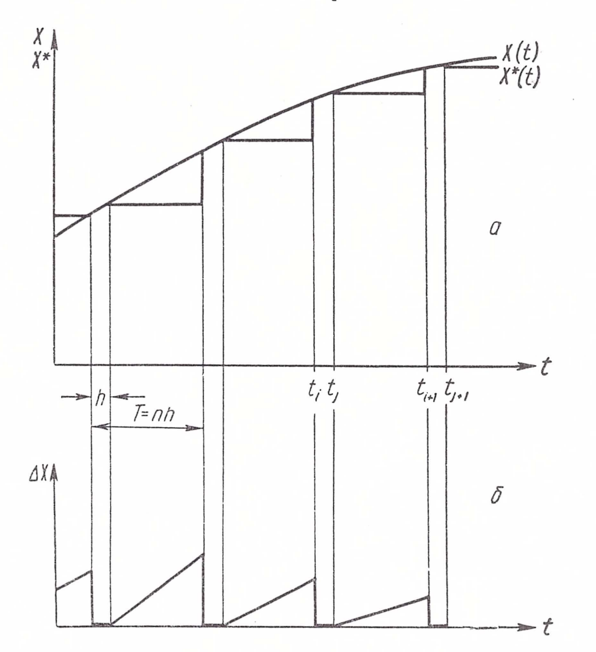


Рассмотрено на семинаре
24 июня 1966 г.

# О ЧАСТОТЕ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ РЕШАЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ

А. Н. ВОЛЛЕРНЕР

1. При построении динамических моделей необходимо определять частоту переключения динамических решающих элементов (ДРЭ) [1]. Одна из особенностей работы динамических моделей




состоит в том, что вместо точных значений функции $X(t)$ отрабатывается некоторая кривая $X^*(t)$, аппроксимирующая эту функцию (рисунок, *а*). На интервале $t_i \leqslant t' \leqslant t_j$ усилитель подключен, и происходит отработка функции $X(t)$. При отключенном усилителе значение функции $X(t')$ в любой момент времени, принадлежащий интервалу $t_j < t' < t_{i+1}$, принимается равным значению

величины, отработанной вычислительным устройством в точке $t_j$. Поэтому выбор частоты переключения ДРЭ должен производиться с учетом погрешности, возникающей при аппроксимации отрабатываемой величины. В данной работе определяется эта частота для идеализированного ДРЭ с учетом допущений, принятых в работе [1].

2. В зависимости от типа устройства, подключаемого к динамической модели, изменяются требования, предъявляемые к оценке допустимой погрешности моделирования. При использовании выходных устройств, реагирующих на мгновенное значение выходных параметров (например, релейных), частота переключения выбирается исходя из требований минимума максимальной погрешности, т. е. точного определения значения величины функций в любой произвольный момент времени.

Если выходные устройства реагируют не на мгновенное, а на усредненное значение функции за какой-то промежуток времени, то применяются усредненные оценки хода изменения отрабатываемых величин во времени. В этом случае частота переключения выбирается по минимуму среднеквадратичной погрешности.

Предположим, что задана абсолютная погрешность моделирования

$$\Delta X = | X(t) - X(t_i) | \approx | X'(t_i) | \Delta t \quad (\Delta t = T - h).$$

Максимальная величина погрешности будет на наиболее крутом участке функции, где первая производная достигает наибольшего значения. Если известна максимальная скорость изменения функции, то при заданной величине приведенной погрешности моделирования $\delta$

$$f_{\mathrm{I}} = \frac{(n-1)\max | X'(t) |}{\delta}; \qquad (1)$$

$f_{\mathrm{I}}$ — частота переключения ДРЭ; $n$ — число ДРЭ, обслуживаемых одним отрабатывающим усилителем.

Частоту переключения ДРЭ также можно определить по заданной величине среднеквадратичной погрешности [2]. Мгновенное значение погрешности моделирования, обусловленное импульсным характером работы ДРЭ, приведено на рисунке, *б*. С достаточной для практики точностью эту кривую можно аппроксимировать серией отрезков прямых с переменным наклоном. В таком представлении среднеквадратичная ошибка $\delta$ отрабатываемой величины $X(t)$ имеет вид

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{h}\int_0^h \Delta X^2 dt} = \frac{\delta}{\sqrt{3}}.$$

Частота переключения ДРЭ в этом случае должна быть равна

$$f_{\mathrm{II}} = \frac{(n-1)\max | X'(t) |}{\sqrt{3}\sigma}. \qquad (2)$$

3. Представляет интерес случай, когда функция имеет ограниченный частотный спектр с максимальной частотой $\omega_c$. Преобразование Фурье, связывающее вещественную функцию времени $X(t)$ и ее спектральную плотность $S(\omega)$ для функции с ограниченным спектром, имеет вид [3]

$$X(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} S(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega.$$

Можно показать, что максимум производной функции $X(t)$ запишется так:

$$\max|X'(t)| = \frac{1}{2\pi} \max \int_{-\omega_c}^{\omega_c} |\omega S(\omega)|\, d\omega \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \max|\omega S(\omega)|\,[\omega_c - (-\omega_c)] = \frac{\omega_c^2}{\pi} \max|S(\omega)|.$$

Подставляя это выражение в формулы (1) и (2), имеем

$$f_{\text{I}} = \frac{(n-1)\,\omega_c^2 \max|S(\omega)|}{\pi\delta}, \tag{3}$$

$$f_{\text{II}} = \frac{(n-1)\,\omega_c^2 \max|S(\omega)|}{\sqrt{3}\,\pi\sigma}. \tag{4}$$

Полученные формулы использовались при экспериментах на динамической модели линейных дифференциальных уравнений [4]. Моделировалось уравнение 2-го порядка вида

$$a_1 X'' + a_2 X = 0,$$

для которого решением является $X = A \sin \omega t$. Частота переключения, подсчитанная по формуле (2), при заданной среднеквадратичной погрешности 2% и $\omega = 1$, составляет порядка 60 *гц*, что хорошо согласуется с экспериментальными результатами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пухов Г. Е., Борковский Б. А. — Кибернетика, 1965, 6.
2. Орнатский П. П.— В кн.: Цифровые измерительные приборы. ЦИНТИ ЭП, М., 1961.
3. Харкевич А. А. — Спектры и анализ. ГИТТЛ, М., 1957.
4. Борковский Б. А., Воллернер А. Н., Катков А. Ф., Романцов В. П.— Настоящий сборник, 35.

Рассмотрено на семинаре
24 июня 1966 г.

# РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНОЕ УСТРОЙСТВО ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ НА ЧЕТЫРЕХСЛОЙНЫХ ДИОДАХ

А. Ф. КАТКОВ, А. И. БРАТЧИКОВ

При синтезе динамических моделей [1, 2] возникает необходимость в простых и надежных устройствах типа кольцевых счетчиков, в которых можно легко изменять коэффициент пересчета и которые имеют достаточно мощный выход, чтобы управлять работой модели без промежуточных усилительных ступеней. Такими устройствами являются кольцевые счетчики, построенные с использованием четырехслойных диодов. Рассмотрим некоторые их особенности.

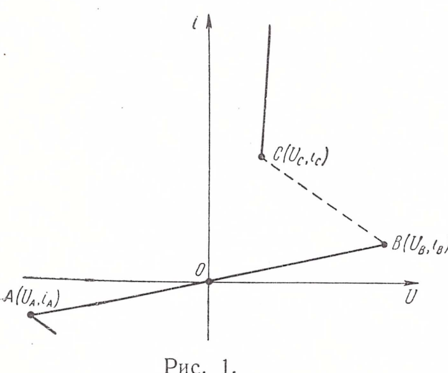


Рис. 1.

Из характеристики, приведенной на рис. 1, можно получить представление об основных параметрах четырехслойного диода, или динистора, как его часто называют. Точка $B$ ($U_B$, $i_B$) ($U_B$ — напряжение и $i_B$ — ток переключения) отделяет участок, где сопротивление диода велико (состояние «закрыто»), от зоны отрицательного сопротивления. Величина напряжения $U_B$ может быть выбрана в зависимости от типа диода в пределах 10 — 500 *в*. Ток $i_B$ соответствует напряжению $U_B$ и может иметь значения в пределах от нескольких микроампер до нескольких десятков миллиампер. В состоянии «закрыто» при напряжении, равном половине напряжения переключения, сопротивление диода изменяется от сотен килоом до единиц мегом в зависимости от типа, а его собственная емкость, уменьшающаяся с увеличением напряжения, равна нескольким десяткам пикофарад. Очень важным параметром диода

является полное сопротивление его при напряжении, близком к нулю. Во всех случаях активное сопротивление здесь меньше, а емкость больше, чем для напряжения запирания. Точка $C$ ($U_C$, $i_C$) отделяет участок отрицательного сопротивления на характеристике диода от участка, где сопротивление диода мало (состояние «открыто»). Ток $i_C$ — это минимальный ток, необходимый для того, чтобы диод находился в открытом состоянии. На обратной ветви характеристики координаты точки $A$ ($U_A$, $i_A$) соответствуют напряжению и току лавинного пробоя. Напряжение $U_A$ фактически определяется напряжением на наружных переходах, величина которого при лавинном пробое велика, причем для большинства динисторов она выше, чем величина напряжения переключения $U_B$. На этой ветви характеристики заметна область отрицательного сопротивления большей или меньшей величины [3].

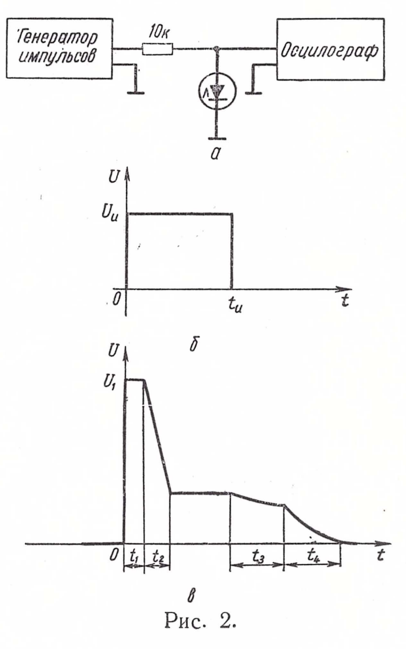


Рис. 2.

Важными параметрами четырехслойного диода, определяющими его быстродействие, являются времена его переключения: время включения, т. е. время перехода из закрытого состояния в открытое при подаче на диод напряжения $U > U_B$, и время выключения, т. е. время обратного перехода в закрытое состояние после отключения напряжения питания. Эксперименты показывают [4], что, если подавать на динистор в схеме, изображенной на рис. 2, *а*, импульс прямоугольной формы (рис. 2, *б*), то напряжение на нем имеет форму, показанную на рис. 2, *в*, где $U_и$ — амплитуда импульса, подаваемого от генератора, $U_1$ — величина напряжения на динисторе до переключения из закрытого состояния в открытое, $t_1$ — время задержки, $t_2$ — время переключения из закрытого состояния в открытое, $t_3$ — время обратной задержки, $t_4$ — время обратного перехода в закрытое состояние. Время задержки $t_1$ уменьшается при увеличении напряжения, приложенного к диоду. Зависимость времени задержки от напряжения была экспериментально определена по схеме, изображенной на рис. 2, *а*, для диодов типа Д228Б (рис. 3) Из ее анализа следует, что напряжение $U_1$ может в несколько раз превышать величину напряжения переключения $U_B$, измеренную на постоянном токе. Превышение $U_1$ над $U_B$ в 4—5 раз позволяет свести время задержки $t_1$ до величины

в десятые доли микросекунд. Собственно время переключения $t_2$ лежит в пределах 0,1—0,3 *мксек* и уменьшается с увеличением $U_и$. Что касается времени обратной задержки $t_3$ и времени обратного переключения $t_4$, то эти величины обычно трудно разделить, а их сумма $t_5 = t_3 + t_4$ представляет собой величину порядка 2—5 *мксек*.

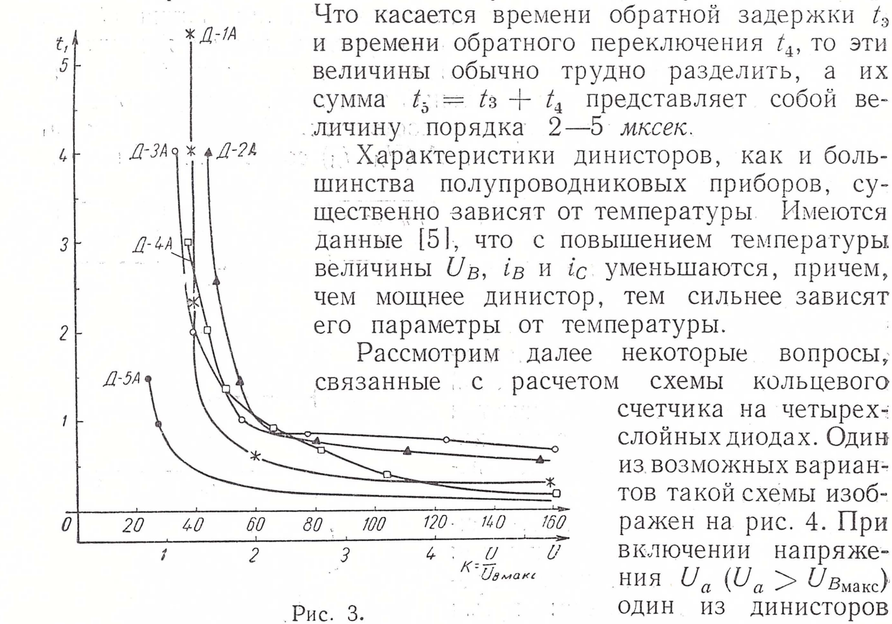



Рис. 3.

Характеристики динисторов, как и большинства полупроводниковых приборов, существенно зависят от температуры. Имеются данные [5], что с повышением температуры величины $U_B$, $i_B$ и $i_C$ уменьшаются, причем, чем мощнее динистор, тем сильнее зависят его параметры от температуры.

Рассмотрим далее некоторые вопросы, связанные с расчетом схемы кольцевого счетчика на четырехслойных диодах. Один из возможных вариантов такой схемы изображен на рис. 4. При включении напряжения $U_a$ ($U_a > U_{Bмакс}$) один из динисторов предположим, динистор Дн$_2$, переключается в открытое состояние. Тогда

$$U_0 = U_a \frac{R}{R + R_0};$$

$U_0$ — напряжение в нулевой точке. Пренебрегая падением напряжения на динисторе в открытом состоянии и диоде в прямом направлении, можем считать, что $U_0 = U_2$. До величины этого напряжения зарядятся конденсаторы $C_1$ и $C_2$, а также конденсатор $C_0$. Через динистор Дн$_2$ протекает ток

$$i_2 = \frac{U_a}{R_0 + R} > i_C,$$

поэтому динистор находится в устойчивом открытом состоянии.

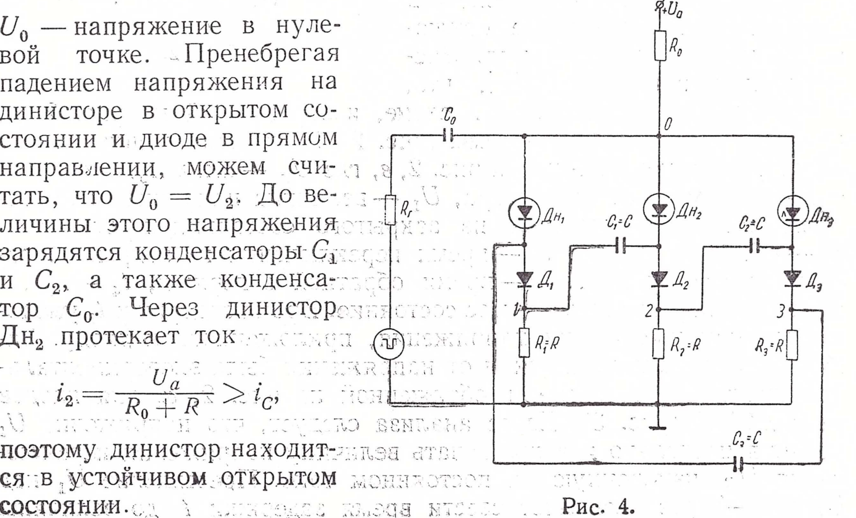



Рис. 4.

Если теперь на вход схемы подать импульс отрицательной полярности достаточной амплитуды от генератора с малым внутренним сопротивлением, то в первый момент напряжение в точке 0 делает скачок и становится отрицательным по знаку. В том случае, когда ток через динистор в течение времени $t_s$ (суммарного времени перехода из открытого состояния в закрытое) не станет больше или равным $i_C$, динистор Дн$_2$ переключится в закрытое состояние. Далее процессы в точках 0 и 2 протекают по разному. Конденсаторы $C_1$ и $C_2$ теперь начинают разряжаться: конденсатор $C_1$ — через сопротивления $R_1$ и $R_2$, а конденсатор $C_2$ — через $R_2$, $R_3$ и обратное сопротивление диода Д$_3$. Постоянная времени разряда конденсатора $C_2$

$$\tau_1 = C\,(R_д + 2R) \cong CR_д \tag{1}$$

($R_д$ — обратное сопротивление диода) значительно больше, поэтому на катоде Дн3 создается длительный отрицательный потенциал, облегчающий условия его переключения. В точке 0 после окончания действия отрицательного входного импульса напряжение скачком увеличивается и по экспоненте приближается к $U_a$. Так как облегченные условия для переключения были созданы у Дн3, то он переключается в открытое состояние через время $t_1 + t_2$, и это состояние фиксируется до подачи на вход следующего отрицательного импульса. Иллюстрацией к описанию работы схемы является рис. 5, где приводятся диаграммы напряжений в точках 0, 2, 3 в момент подачи входного импульса.

Для устойчивой работы схемы необходимо, чтобы ее элементы удовлетворяли следующим трем неравенствам:

$$\frac{U_a}{R_0 + R} > i_C, \tag{2}$$

$$\frac{U_a R}{R_0 + R} < U_{B\,мин}, \tag{3}$$

$$U_{B\,макс} - \frac{U_a R}{R_0 + R} < U_{B\,мин}. \tag{4}$$

Выполнение первого неравенства, как указывалось выше, обусловливает устойчивость открытого состояния каждого из динисторов. Невыполнение второго неравенства может повлечь за собой такую ситуацию, когда в открытом состоянии окажется несколько динисторов из-за значительного разброса величины $U_B$ среди однотипных приборов. Третье неравенство показывает, что при работе устройства будет открываться каждый раз динистор, стоящий рядом с ранее открытым динистором, а не тот, для которого $U_B = U_{B\,мин}$. Если в исходные данные для расчета входит ток $i$, выраженный через сопротивление нагрузки $R$, то следует выбирать четырехслойные диоды таких типов, чтобы

$$i > i_G. \tag{5}$$

Тогда неравенства (1) — (3) примут такой вид:

$$\frac{U_a}{R + R_0} = i, \tag{6}$$

$$iR < U_{B\text{мин}}, \tag{7}$$

$$U_{B\text{макс}} - U_{B\text{мин}} < iR. \tag{8}$$

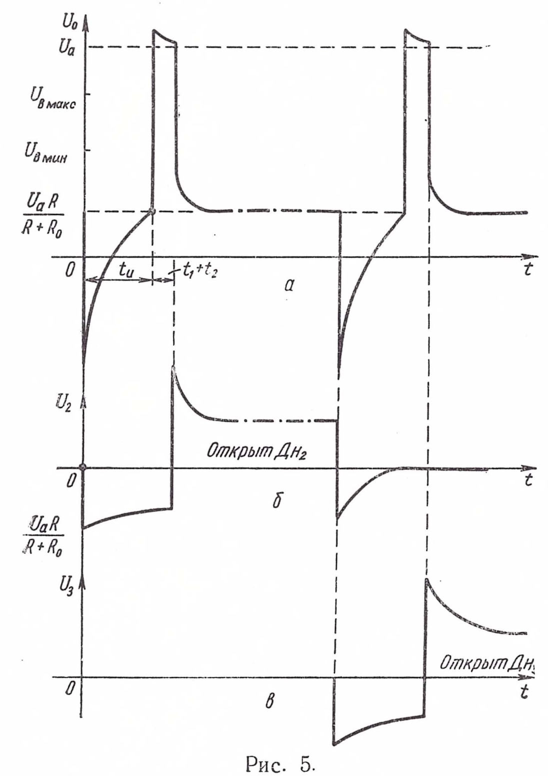



Рис. 5.

Если неравенства (7) и (8) решить относительно $R$, то получим предельные значения, которые может иметь сопротивление $R$:

$$R < \frac{U_{B\,\text{мин}}}{i},$$

$$R > \frac{U_{B\,\text{макс}} - U_{B\,\text{мин}}}{i},$$

вытекающие из условий устойчивой работы. Определяя значение сопротивления $R$ как среднее арифметическое его предельных значений, получим

$$R = \frac{U_{B\,\text{макс}}}{2i}. \tag{9}$$

Из неравенств (3) и (4) следует еще одно соотношение, которое накладывает ограничение на разброс напряжений $U_B$, применяемых динисторов. Оно получается из неравенства (4) при подстановке в него выражения $\frac{u_a R}{R+R_0}$ из неравенства (3) и имеет такой вид:

$$U_{B\,\text{макс}} < 2U_{B\,\text{мин}}. \tag{10}$$

Для того чтобы определить некоторые соотношения, необходимые для расчета, рассмотрим более подробно процессы, протекающие в устройстве при подаче на его вход запускающего импульса. В момент появления на входе отрицательного импульса с амплитудой $U_и$ напряжение в точке 0 практически мгновенно становится равным величине

$$\frac{U_a R}{R+R_0} - U_и < 0 \quad (R_г \cong 0),$$

как это показано на рис. 5. Так как сопротивление четырехслойного диода при обратном напряжении на его зажимах велико, что следует из рассмотрения его характеристики (рис. 1), то эквивалентная схема устройства при $0 < t < t_и$ будет такая, как показано на рис. 6, при условии, что ключ К — разомкнут. Напряжение в точке 0 изменяется по экспоненциальному закону

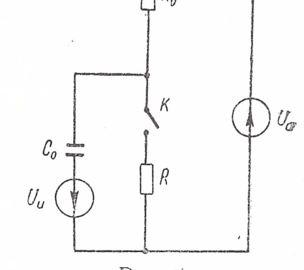


Рис. 6.

$$U_0(t) = U_a - R_0 \frac{U_a \frac{R_0}{R+R_0} + U_и}{R_0 + R_г} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Полагая, что $R_г \cong 0$, получим упрощенное выражение для $U_0(t)$:

$$U_0(t) = U_a - \left(U_a \frac{R_0}{R+R_0} + U_и\right) e^{-\frac{t_и}{\tau}}. \tag{11}$$

Для того чтобы динистор, который был открыт, успел закрыться, необходимо, чтобы напряжение в точке 0 не становилось положительным по знаку в течение времени $t_5$. Аналитически это условие можно выразить в таком виде:

$$U_0(t_5) = U_a - \left(U_a \frac{R_0}{R+R_0} + U_и\right) e^{-\frac{t_5}{\tau}} \leqslant 0. \tag{12}$$

Исходя из требований стабильности длительности импульса на выходе кольцевого счетчика, было бы желательно, чтобы переброс четырехслойных диодов в открытое состояние происходил в момент окончания входного импульса при $t = t_и$, когда в точке 0 имеет место скачок напряжения на величину $\frac{U_и R}{R+R_г}$. Для этого необходимо,

чтобы напряжение $U_0\,(t)$ в момент $t = t_{и}$ не было равным или больше $U_{B мин}$, т. е. чтобы

$$U_0\,(t_{и}) = \frac{U_a\,R}{R + R_0}$$

с учетом (3). Развернув $U_0\,(t_{и})$ из выражения (11), получим

$$U_a - \left(U_a \frac{R_0}{R + R_0} + U_{и}\right) e^{-\frac{t_{и}}{\tau}} = \frac{U_a\,R}{R + R_0}\,. \tag{13}$$

Производя соответствующие преобразования, из условий (12) и (13) получим такую систему уравнений:

$$U_{и} = U_a\,e^{\frac{t_5}{\tau}} - U_a \frac{R_0}{R + R_0},$$

$$1 + \frac{U_{и}}{U_a} \cdot \frac{R + R_0}{R_0} = e^{\frac{t_{и}}{\tau}}, \tag{14}$$

где $\tau = R_0 C_0$. Совместное решение этих уравнений дает возможность определить постоянную времени цепи, изображенной на рис. 6, так, чтобы условия (12) и (13) выполнялись, т. е.

$$\tau = \frac{t_{и} + t_5}{\ln \frac{R + R_0}{R_0}}\,. \tag{15}$$

Как указывалось выше, время задержки при переходе динистора из закрытого состояния в открытое зависит от величины напряжения на его электродах. Для быстрого открывания динистора ($t_1 <$ $< 1{,}0$ *мксек*) необходимо, чтобы величина напряжения в точке 0 в момент окончания запускающего импульса, была выбрана с учетом зависимости, приведенной на рис. 3. Тогда при $R_{г} \cong 0$ справедливо следующее равенство:

$$iR + U_{и} = KU_{B\,макс},$$

где $K = 2 \div 3$ определено из графика (рис. 3). Находя сопротивление $R$ из формулы (9), для величины напряжения запускающего импульса получим такое выражение:

$$U_{и} = KU_{B\,макс} - \frac{U_{B\,макс}}{2}\,. \tag{16}$$

Скачок напряжения в точке 0 при $t = t_{и}$ сменяется его спаданием до величины $U_a$ с постоянной времени $\tau$, потому что все динисторы еще закрыты. Так как желательно, чтобы время задержки при открывании динистора было минимальным, нужно выбирать величину $U_a$ так, чтобы выполнялось соотношение

$$U_a = KU_{B\,макс}. \tag{17}$$

После открытия очередного динистора напряжение в точке 0 уменьшается до значения $\frac{U_a R}{R + R_0}$. При расчете устройства можно

принять любой порядок, исходя из того, какие величины заданы. Предположим, что исходными величинами является ток нагрузки $i$ и длительность запускающего импульса $t_и$. Тогда из условия (5) выбираем тип четырехслойного диода и определяем для него значения $U_{B\text{макс}}$, $U_{B\text{мин}}$. Далее из соотношения (17) находим величину напряжения питания $U_a$ и величину сопротивления $R$ из соотношения (9). Из выражения (6) найдем значение сопротивления $R_0$, а из формулы (15) — величину емкости конденсатора $C_0$. Для определения амплитуды запускающего импульса $U_и$ воспользуемся соотношением (16). Выбирая тип диодов $Д_1$, $Д_2$ и $Д_3$ по допустимому обратному напряжению, из равенства (1) определим величину емкости конденсатора $C$ так, чтобы $3\tau_1 \ll t_и$. Что касается предельной частоты работы кольцевого счетчика, то подробно этот вопрос не анализировался, хотя ясно, что она не может быть больше, чем

$$f = \frac{1}{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_{уст}},$$

где $t_{уст}$ — время окончания переходных процессов в схеме после открывания очередного динистора.

Изложенная методика применялась при расчете кольцевого счетчика, использованного в качестве распределительного устройства динамической модели [6]. Проведенные эксперименты показали, что расчетные соотношения достаточно точно отражают процессы, протекающие в схеме.

ЛИТЕРАТУРА


1. Пухов Г. Е., Борковский Б. А. — Кибернетика, 1965, 6.
2. Воллернер А. Н., Катков А. Ф. — В кн.: Труды семинара «Методы математического моделирования и теории электрических цепей». Вып. 2. «Наукова думка», К., 1966.
3. Чэпи М. Диод типа $p — n — p — n$. Перевод П —17367, 1962.
4. Берг М. А., Гаряинов С. А. — Радиотехника, 1962, 1.
5. Тищенко Н. М., Машлыкин В. Г. Динисторы и тиристоры и их применение в автоматике. «Связь», М., 1966.
6. Борковский Б. А., Воллернер А. Н., Катков А. Ф., Романцов В. П. — Настоящий сборник, 35.



Доложено на семинаре
7 января 1966 г.

# ТРАНЗИСТОРНАЯ КЛЮЧЕВАЯ ЯЧЕЙКА ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Л. А. СИМАК

В настоящей статье приводятся результаты экспериментальной разработки схемы бесконтактного ключа, предназначенного для

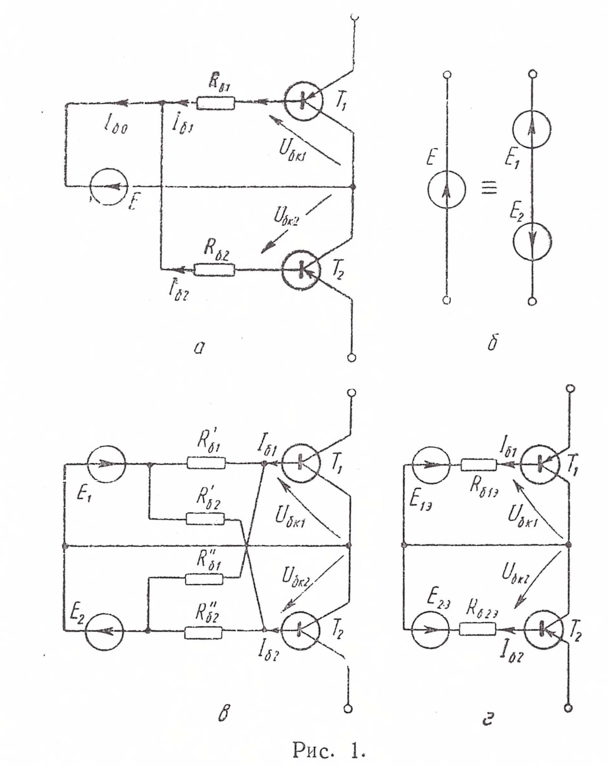



Рис. 1.

использования в схемах динамических моделей [3, 4], на базе ключевой ячейки (КЯ) машины «Днепр-1».

Бесконтактный ключ, обладая максимально возможным обратным и минимальным прямым сопротивлениями и малой вносимой э. д. с., должен обеспечивать коммутацию токов до 20 *ма*, при коммутируемых напряжениях до $\pm$ 50 *в* при сохранении потенциальной развязанности коммутируемых цепей от цепей управления.

Предварительно рассмотрим основные соотношения для эквивалентной цепи управления ключевой ячейки Эквивалентная схема цепи управления транзисторным ключом с инверсным включением триодов приведена на рис. 1, *а*. Соотношения для токов и напряжений схемы для двух основных режимов имеют вид [1, 2]

$$I_{б0} = I_{б1} + I_{б2}, \quad (1)$$

$$I_{б1} = -\frac{E}{R_{б1} + R_{бк1}}, \quad (2)$$

$$I_{б2} = -\frac{E}{R_{б2} + R_{бк2}}, \quad (3)$$

$$U_{бк1} = E + I_{б1}R_{б1} = E\frac{R_{бк1}}{R_{б1} + R_{бк1}}, \quad (4)$$

$$U_{бк2} = E + I_{б2}R_{б2} = E\frac{R_{бк2}}{R_{б2} + R_{бк2}}. \quad (5)$$

Режим — «выключено» ($E > 0$):

$$R_{бк1} = \frac{|U_{бк1}|}{|I_{б1}|} \gg R_{б1}, \quad (6)$$

$$R_{бк2} = \frac{|U_{бк2}|}{|I_{б2}|} \gg R_{б2}, \quad (7)$$

$$0 > I_{б1} \approx -\frac{E}{R_{бк1}}, \quad (8)$$

$$0 > I_{б2} \approx -\frac{E}{R_{бк2}}, \quad (9)$$

$$I_{б0} \approx -E\left(\frac{1}{R_{бк1}} + \frac{1}{R_{бк2}}\right), \quad (10)$$

$$0 < U_{бк1} \approx E\left(1 - \frac{R_{б1}}{R_{бк1}}\right) \approxeq E, \quad (11)$$

$$0 < U_{бк2} \approx E\left(1 - \frac{R_{б2}}{R_{бк2}}\right) \approxeq E, \quad (12)$$

Режим — «включено»($E < 0$):

$$R_{бк1} = \frac{|U_{бк1}|}{|I_{б1}|} \ll R_{б1}, \quad (13)$$

$$R_{бк2} = \frac{|U_{бк2}|}{|I_{б2}|} \ll R_{б2}, \quad (14)$$

$$0 < I_{б1} \approx -\frac{E}{R_{б1}} = \bar{I}_{б1}, \quad (15)$$

$$0 < I_{б2} \approx -\frac{E}{R_{б2}} = I_{б2}, \quad (16)$$

$$I_{б0} \approx -E\left(\frac{1}{R_{б1}} + \frac{1}{R_{б2}}\right) = \bar{I}_{б1} + \bar{I}_{б2}, \quad (17)$$

$$0 > U_{бк1} \approx E\frac{R_{бк1}}{R_{б1}} \approxeq 0, \quad (18)$$

$$0 > U_{бк2} \approx E\frac{R_{бк2}}{R_{б2}} \approxeq 0. \quad (19)$$

Из приведенных формул видно, что режим выключенного ключа определяется величинами $U_{бк1}$, $U_{бк2}$ (11), (12), а режим включенного ключа — величинами токов $\bar{I}_{б1}$, $\bar{I}_{б2}$ (15), (16). Оба режима можно реализовать различными способами. Укажем два из них.

1. Источник $E$ реализуется как последовательное соединение двух управляемых по величине источников $E_1$ и $E_2$ (рис. 1, *б*):

$$E_1 - E_2 = E \begin{cases} > 0, \text{ режим «выключено»}, \\ < 0, \text{ режим «включено»}. \end{cases} \qquad (20)$$

Например, в режиме «выключено» $E_1 = E_{х.х}$, $E_2 = 0$, а в режиме «включено» $E_2 = E_{к.з}$, $E_1 = 0$.

2. Управление осуществляется от двух параллельно работающих источников (рис. 1, *в*). Используя метод преобразования цепи, ее можно свести к схеме рис. 1, *г* со следующими значениями параметров:

$$E_{1э} = \frac{E_1 R''_{б1} - E_2 R'_{б1}}{R'_{б1} + R''_{б1}}, \qquad (21)$$

$$R_{б1э} = \frac{R'_{б1} R''_{б1}}{R'_{б1} + R''_{б1}}, \qquad (22)$$

$$E_{2э} = \frac{E_1 R''_{б2} - E_2 R'_{б2}}{R'_{б2} + R''_{б2}}, \qquad (23)$$

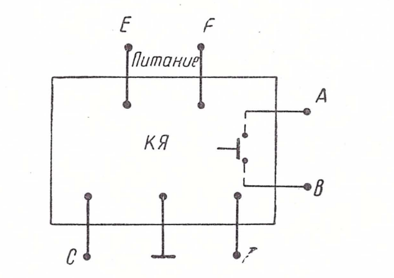
$$R_{б2э} = \frac{R'_{б2} R''_{б2}}{R'_{б2} + R''_{б2}}. \qquad (24)$$

Изменяя величины э. д. с. и сопротивлений, можно полностью свести данный вариант к первому.

Известная схема ключевой ячейки машины «Днепр-1» предназначена для коммутации токов до 2 *ма* с напряжениями до 30 *в* и не удовлетворяет требованиям, предъявляемым к бесконтактным переключателям для динамических моделей [3, 4]. Проведем анализ работы схемы с целью выяснения возможности изменения технических характеристик ячейки. Схема ячейки изображена на рис. 2.

В режиме «выключено» реализуется условие $E_2 > E_1$ за счет того, что большая часть напряжения сети $U$ падает на первичной обмотке трансформатора Тр$_2$ (при одинаковых числах витков обмоток нагрузка вторичной обмотки Тр$_2$ меньше, чем Тр$_1$). Поэтому $|U_2| > |U_1|$, $|e_2| > |e_1|$ и, как следствие, $E_2 > E_1$. Переходы коллектор — база $T_1$ и $T_2$ заперты разностью напряжений $E_2 - E_1$. При подаче разрешающего потенциала — 12 *в* на вход управляющего триода $T_3$ (режим «включено») срабатывает магнитный ключ на Тр$_2$ (резко уменьшается сопротивление, вносимое в цепь первичной обмотки трансформатора) и напряжение питающей сети перераспределяется так, что $|U_2| < |U_1|$, отсюда $|e_2| < |e_1|$, $E_2 < E_1$ и к переходам коллектор — база прикладывается разность напряжений $E_2 - E_1$, открывающая переходы. Через них протекают токи насыщения, определяемые величинами сопротивлений базовых цепей и внутренними сопротивлениями источников $E_1$ и $E_2$.

Как показал опыт, прямое изменение параметров схемы рис. 2 для увеличения базовых токов в режиме насыщения без изменения конфигурации схемы не приводит к цели. Это происходит по той причине, что эффективность магнитного ключа резко падает при увеличении нагрузки на источник $E_1$, резко увеличиваются потери в магнитопроводе при повышении коэффициента трансформации и желаемого перераспределения $E_2$ и $E_1$ не происходит.



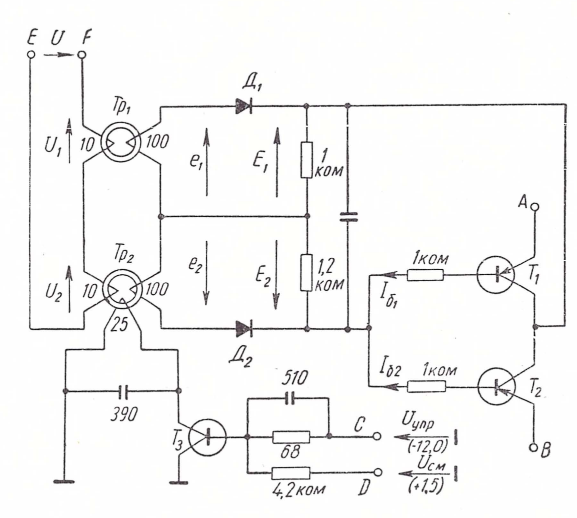




Рис. 2.

Мало работоспособными оказались также схемы с использованием в выпрямительных цепях двухполупериодных и мостовых выпрямителей.

Приведем некоторые соображения о целесообразных изменениях параметров и схемы управления транзисторами $T_1$ и $T_2$, которые были выяснены во время экспериментов со схемами ключей.

1. Коэффициенты трансформации трансформаторов не должны быть больше 2—3, если токи нагрузки обмоток составляют 5—10 *ма* и более.

2. Сопротивления базовых цепей должны быть, по возможности, не меньше 200—500 *ом* в связи с тем, что необходимо обеспечить независимость токов базо-коллекторных переходов от величин внутренних сопротивлений их в открытом состоянии.

3. Коллекторно-базовые переходы транзисторов $T_1$ и $T_2$ нельзя включать параллельно, ввиду того, что суммарный базовый ток $I_{б0}$ распределяется неравномерно между триодами из-за заметного разброса и нестабильности величин внутренних сопротивлений переходов, что приводит к несимметрии свойств ключа по отношению к коммутируемым токам и напряжениям различной полярности. Особенно это сказывается при малых значениях напряжения питающей сети цепи управления.

4. Схема магнитного ключа должна быть видоизменена так, чтобы обеспечивалось эффективное перераспределение напряжения питающей сети между источниками $E_1$ и $E_2$.

5. Следствием п. 1 и 2, а также того, что суммарный ток в открытом состоянии должен быть значительным, является то, что источник питания цепи управления $U$ должен быть относительно высоковольтным (практически легко удается построить схемы удовлетворительных ключей при $U \geqslant 4—6$ *в*).

Испытывалось несколько схем ключей, которые отличались от ячейки КЯ машины «Днепр-1» следующим:

1) изменена схема магнитного ключа для управления транзисторным ключом с целью повышения переключаемых мощностей; в одном из вариантов схем магнитный ключ в цепи управления заменен диодным мостовым;

2) введен режим запирающегося источника в цепи управления, позволяющий увеличить ее экономичность;

3) благодаря специфике применения ключей в групповых динамических элементах, оказалось возможным построить двойной ключ с общей схемой управления.

На рис. 3, *а* показана схема ключа с измененным магнитным ключом в цепи управления. По сравнению со схемой КЯ «Днепр-1» введен управляемый дроссель $Тр_3$, с помощью которого изменяется величина питающего напряжения $Тр_2$ — $U_2$. Трансформатор $Тр_1$ питается неизменным по амплитуде напряжением сети $U$. Сопротивления в базовых цепях транзисторов $T_1$ и $T_2$ — $R_{б1}$ и $R_{б2}$ служат для устранения влияния разброса сопротивлений переходов «коллектор — база» транзисторов в режиме «включено» на величины токов $I_{б1}$ и $I_{б2}$.

Несколько более удачной может считаться схема рис. 3, *б*, отличающаяся от описанной выше наличием независимых источников смещающих напряжений $E_2$ и $E_1^*$. Схема работает следующим образом. В состоянии «выключено» ($U_{упр} = 0$, обмотка $w_3''$ разомкнута) напряжение питающей сети распределяется между первичными обмотками $Тр_2$ и $Тр_3$ так, что $|U_3| > |U_2|$ и $|e_2| < |e_1|$,

поэтому $U_{кб1} > 0$ и $U_{кб2} > 0$, транзисторы $T_1$ и $T_2$ заперты. Наличие сопротивления $R_2$ принципиально необходимо, чтобы ослабить деление напряжения $U_{кб1}$ и $U_{кб2}$, так как если $R_2 = \infty$, то $R_{кб1}$ и $R_{кб2}$ оказываются сравнимы с выходным обратным сопротивле-

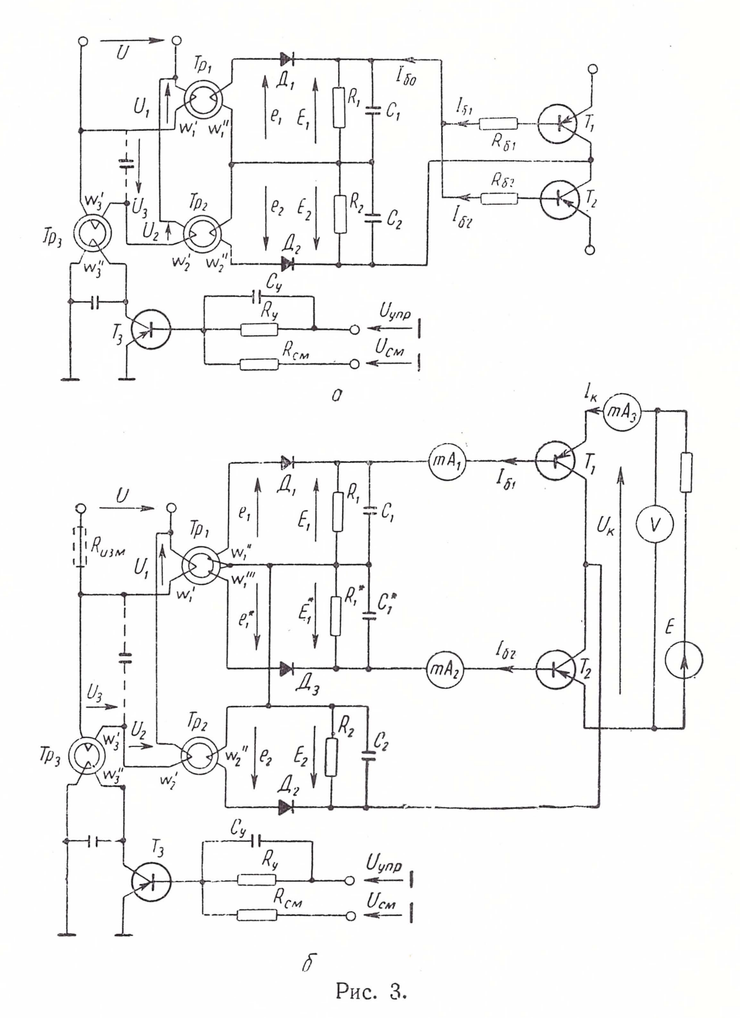


Рис. 3.

нием источника $E_2$ и коллекторно-базовые переходы оказываются закрытыми недостаточно.

При подаче сигнала «включено» ($U_{упр} < 0$) напряжение $U$ перераспределяется так, что $|U_2| > |U_1|$ и $|e_2| > |e_1|$. При этом диоды $Д_1$ и $Д_3$ закрываются (режим запирающегося источника), напряжения на сопротивлениях $R_1$ и $R_1^*$ определяются источни-

ком $E_2$. Через коллекторно-базовые переходы транзисторов $T_1$ и $T_2$ текут токи, величины которых ограничиваются сопротивлениями $R_1$ и $R_1^*$:

$$I_{б1} = \frac{E_{2\,вкл}}{R_1 + R_{бк1\,вкл}}, \quad I_{б2} = \frac{E_{2\,вкл}}{R_1^* + R_{бк2\,вкл}}.$$

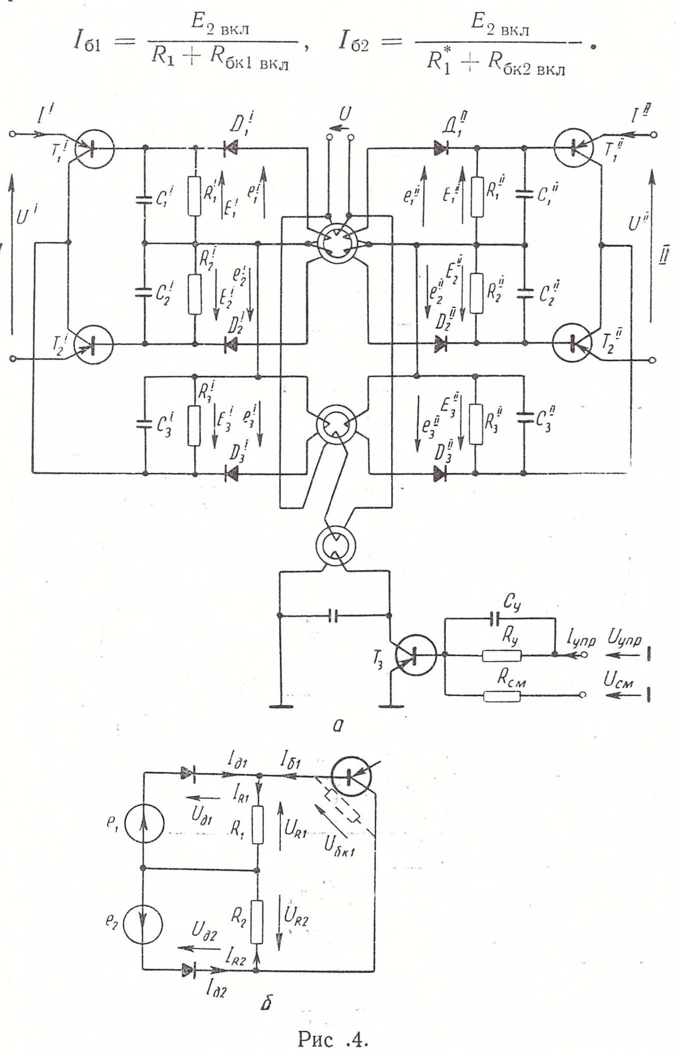



Рис .4.

При необходимости $R_1^*$ может быть подобрано с учетом разброса $R_{бк1}$ и $R_{бк2}$.

На этом же рисунке приведена схема измерения основных статических характеристик ключей. Параметры ключа имели следующие значения: $w_1' = 15$, $w_1'' = 10$, $w_1''' = 10$, $w_2' = 10$, $w_2''=$

$= 15$, $w_3' = 21$, $w_3'' = 30$, $R_1 = 450$ *ом*, $R_1^* = 410$ *ом*, $R_2 = 4{,}3$ *ком*, $R_{см} = 4{,}2$ *ком*, $R_у = 1$ *ком*, $C_1 = C_1^* = C_2 = 0{,}01$ *мкф*, $C_0 = C_у = 510$ *пкф*, $E_{см} = 1{,}5$ *в*, $T_1$, $T_2$ — типа П-26, $T_3$ — П-16. В качестве миллиамперметров использовались микроамперметры типа М-95 — 10/100 с наружным шунтом, $R_{изм} = 4$ *ом*, милливольтметр типа МВЛ-2М. Эта же аппаратура использовалась и при измерении характеристик остальных ключей.

Поскольку в схемах динамических моделей часто встречается случай синхронной работы двух ключей, переключающих вход

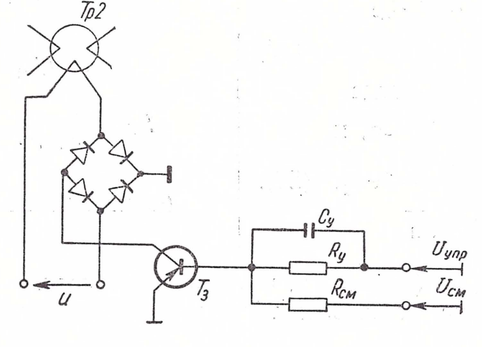



Рис. 5.

и выход группового решающего элемента [3, 4], оказалось возможным управлять этими ключами с помощью одной схемы управления. Схема соответствующей ключевой ячейки приведена на рис. 4, *а*.

С целью облегчения рабочего режима ключевого транзистора Т₃ цепи управления можно заменить управляемый дроссель Тр₃ диодным мостом (рис. 5). Эффективность цепи управления и ее экономичность при этом значительно повышаются. Однако, следует иметь в виду, что источники питающих напряжений $U$ для различных ключей должны быть при этом развязаны.

В цепях управления всех описанных выше ключей использовался так называемый «режим запирающегося источника», позволяющий при прочих равных условиях увеличить ток без ключевых транзисторов в открытом состоянии или при неизменном токе баз уменьшить мощность, потребляемую цепью управления.

Поясним кратко существо этого режима. Эквивалентная схема цепи управления одного из ключевых транзисторов по постоянному току в первом приближении имеет вид рис. 4, *б*. При реализации режима запирающегося источника параметры схемы выбираются таким образом, чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$e_1 = \text{const}. \qquad (25)$$

Режим «выключено»

$$e_1 > e_2 \approx 0, \qquad (26)$$

$$I_{д1} > 0 \quad (U_{д1} \approx 0),\ U_{кб1} > 0, \qquad (27)$$

$$I_{б1} < 0,\ R_2 \ll R_{кб1},$$

$$U_{кб1} = \frac{e_1 - \frac{R_2}{R_{д2} + R_2} e_2}{R_{бк1} + \frac{R_2 \cdot R_{д2}}{R_2 + R_{д2}}} R_{бк1}. \qquad (28)$$

Если $e_2 \approx 0$, тогда

$U_{д2} < 0,\ R_{д2} \to \infty$, и

$$U_{кб1} \approx \frac{e_1}{1 + \frac{R_2}{R_{бк1}}} \approxeq e_1, \qquad (29).$$

Режим «включено»

$$e_1 < e_2, \qquad (30)$$

$$I_{д2} > 0,\ (U_{д2} \approx 0),\ U_{кб1} < 0, \qquad (31)$$

$$I_{б1} > 0,\ R_1 \gg R_{кб1}.$$

Если $U_{R1} = \frac{e_2}{R_{бк1} + R_1} R_1 > e_1, \qquad (32)$

то $U_{д1} < 0$,

$$I_{б1} = \frac{e_2}{R_1 + R_{бк1}} \approx \frac{e_2}{R_1} \qquad (33)$$

(режим источника тока).

Из формул (26) — (29) видно, что в режиме «выключено» переходы коллектор — база ключевых транзисторов заперты напряжением

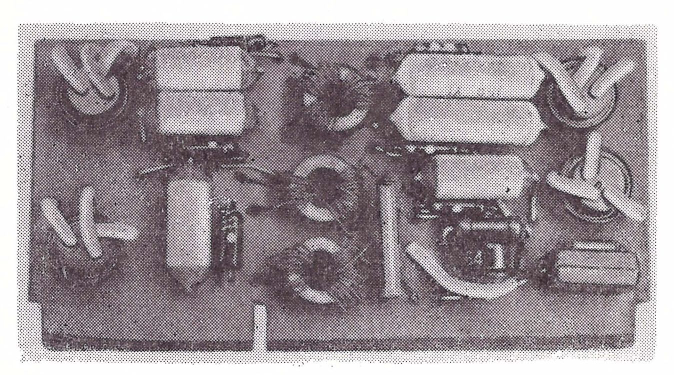


Рис. 6.

источника $e_1$, а в режиме «включено» при выполнении соотношения (32) диод $Д_1$ заперт, и ток перехода коллектор — база открытого ключевого транзистора определяется лишь величиной напряжения $e_2$ и сопротивления $R_1$ и совершенно не зависит от величины $e_1$.

В обычном случае, когда диод $Д_1$ не запирается, ток $I_{б1}$ определяется разностью напряжений, зависящих от $e_1$ и $e_2$; обеспечение необходимого тока базы при этом неизбежно было бы связано с большими потерями мощности в цепи управления.

Внешний вид одного из вариантов ключевой ячейки с магнитным ключом в цепи управления приведен на рис. 6.

Характеристики, измеренные для ключей по схеме рис. 3, *б*, имели следующие значения:

1) падение напряжения на включенном ключе при коммутируемом токе:

а) 500 *мка* (ключ *I*) не более 100 *мв*;
б) 20 *ма* (ключ *II*) не более 100 *мв*;

2) собственное сопротивление включенного ключа:

а) 200 *ом* (ключ *I*),
б) 5 *ом* (ключ *II*);

3) обратный ток выключенного ключа при коммутируемом напряжении 50 *в*:

а) не более 0,5 *мка* (ключ *I*), $R_{обр} > 100$ *мом*,
б) не более 2,5 *мка* (ключ *II*), $R_{обр} > 20$ *мом*;

4) длительности фронтов импульсов при переключении постоянных напряжений порядка $\tau_{пер} \approx 10 - 15$ *мксек*,

$$\tau_{зад} \approx 30 \text{ мксек};$$

5) цепь управления: $U = -6$ *в*, $I = 10$ *ма*;
6) цепь питания: $U = +3 - 6$ *в*, $f = 200$ *кгц*;
7) кажущаяся мощность, потребляемая ключевой ячейкой от сети: в режиме «выключено» $S_0 \cong 0{,}25$ *ва*,
в режиме «включено» $S_к \cong 0{,}5$ *ва*.

В ключе I использовались транзисторы типа П-104, в ключе II — типа П-26.

Для сравнения заметим, что падение напряжения на включенном ключе ячейки КЯ машины «Днепр-1» при токе 2 *ма* составляет 1 *в*, т. е. прямое сопротивление в 100 раз больше при токе, меньшем в 10 раз.

Описанные схемы, по-видимому, после соответствующей доработки, могут быть использованы в качестве бесконтактных ключей в устройствах специализированных АВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Будинский Я. Транзисторные переключающие схемы. «Связь», М., 1965.
2. Синицкий Л. А. Измерительные преобразователи постоянного тока. «Наукова думка», К., 1964.
3. Пухов Г. Е. — Кибернетика, 1965, 2.
4. Борковский Б. А. — Кибернетика, 1965, 3.

Доложено на семинаре
18 февраля 1966 г.

# ПОСТРОЕНИЕ МНОГООПЕРАЦИОННЫХ УСИЛИТЕЛЕЙ

В. Д. САМОЙЛОВ

Постановка на аналоговых машинах сложных задач, построение самонастраивающихся аналоговых моделей, стремление расширить класс задач, решаемых с помощью аналоговых машин, обуславливает все большее проникновение элементов дискретной техники в аналоговую.

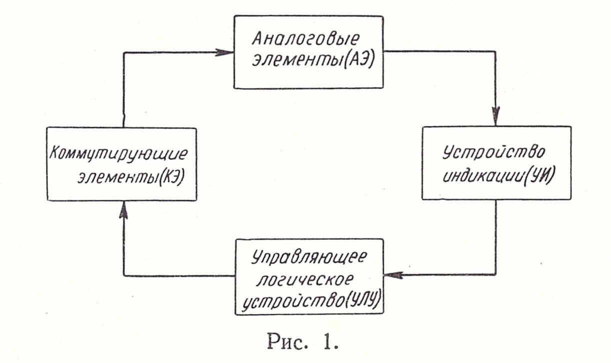



Рис. 1.

Использование дискретных логических элементов для управления работой аналоговых блоков неизбежно приводит к рассмотрению также устройств связи, которые позволяют организовать совместную работу аналоговых и дискретных элементов. Если представить себе такую аналого-дискретную модель в виде блок-схемы рис. 1, то устройствами связи являются:

1) коммутирующие элементы (КЭ), производящие в зависимости от команды управляющего логического устройства (УЛУ): а) переключения в структуре аналогового решающего элемента (изменение операции, масштаба, место включения элемента); б) задание новых начальных условий на интеграторы при решении дифференциальных уравнений;

2) устройство индикации выполнения заданных условий (нуль-орган), отмечающее момент достижения напряжением в модели

$U(t)$ определенного, заранее заданного значения $U_x$ или равенство нулю некоторой функции от переменных модели

$$U[U_1(t),\ U_2(t), \ldots, U_n(t)] = 0.$$

Устройство индикации при этом выдает дискретный сигнал в УЛУ.

В настоящее время в аналоговых машинах применяются контактные и бесконтактные коммутирующие элементы. Контактные КЭ являются идеальными ключами, но большое время переключения не позволяет использовать их в быстродействующих моделях

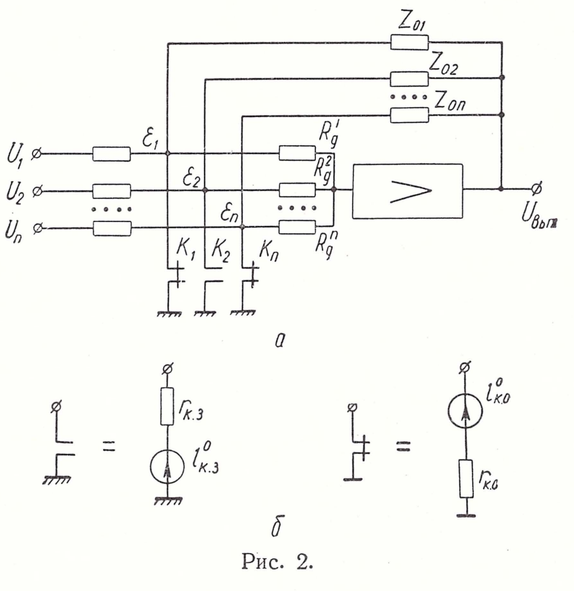



Рис. 2.

или при моделировании в натуральном масштабе времени быстропротекающих процессов.

При использовании быстродействующих бесконтактных КЭ необходимо такое построение схем коммутации, чтобы неидеальность этих ключей оказывала минимальное влияние на результаты решения задачи. Некоторые модели построения таких схем рассмотрены в работе [1].

Особое внимание необходимо уделять ключам, коммутирующим вход УПТ, так как проектирование ключей, коммутирующих выход, проще, и, кроме того, в отдельных случаях можно обойтись без выходных ключей.

Обычно коммутация входа УПТ бесконтактными ключами производится по схемам, аналогичным коммутации с помощью контактных элементов. При этом неидеальность бесконтактных КЭ вносит большую погрешность (сдвиг нуля, дрейф) при реализации заданной операции. Поэтому стараются добиться малого уровня остаточного напряжения на открытом и закрытом ключе (для

частичной компенсации остаточного напряжения ставят два триода), высокого (порядка нескольких сот мегом) сопротивления в закрытом состоянии. Так, например, даже при сопротивлении ключа в закрытом состоянии $R_{к.з} = 100$ *Мом* при отключении от суммирующей точки УПТ напряжения 100 *в* на выходе усилителя (при $R_{о.с} = 1$ *Мом*) появится дополнительный сдвиг напряжения в 1 *в*. Дополнительный дрейф нуля на интеграторе (при $C_{о.с} = 1$ *мкф*) будет 1 *в/сек*, что недопустимо много. Расчитывать на триоды с сопротивлением в закрытом состоянии больше 100 *Мом* практически трудно, так как даже для отобранных кремниевых триодов повышение температуры вызывает резкое падение этого сопротивления. Поэтому для уменьшения дополнительного дрейфа приходится уменьшать максимальную величину рабочего напряжения, уменьшать допустимое время интегрирования и т. д.

Ключи на полупроводниковых триодах имеют хорошие характеристики в открытом состоянии, поэтому желательно применение схем коммутации, использующих эти характеристики.

Схема коммутации входа УПТ с помощью заземляющих ключей показана на рис. 2.

Усилитель со сменной операционной частью, переключаемой с помощью УЛУ по заранее заданной программе, назовем многооперационным.

Рассчитаем дополнительный дрейф, появляющийся в многооперационном усилителе от неидеальности коммутирующих элементов. Схемы замещения полупроводниковых ключей в открытом и закрытом состояниях приведены на рис. 2, *б*. Так как заземление входа УПТ недопустимо, необходимо ставить сопротивления $R_д$, отделяющие вход УПТ от ключа. Таким образом появляется $n$ коммутируемых точек $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, которые назовем квазисуммирующими. В любой момент времени одна из этих точек находится в рабочем положении, остальные при помощи ключей заземлены.

На рис. 3 представлена схема замещения многооперационного усилителя. В схеме учтены остаточные напряжения на ключах и конечные сопротивления ключей в открытом и закрытом состояниях. Определим дополнительную погрешность, создаваемую ключами в схеме.

Суммарное остаточное напряжение на открытых ключах равно

$$E_{к.\,о} = \sum_{i=1}^{m-1} (e^0_{к.\,о_i} + r_{к.о_i} I_{вх_i}), \qquad (1)$$

где $m$ — общее количество квазисуммирующих точек; $I_{вх_i}$ — ток $i$-ой нерабочей квазисуммирующей точки, создаваемый входными комплексными сопротивлениями и комплексными сопротивлениями обратной связи:

$$I_{вх_i} = u_{вых} Z_{0i} + \sum_{i=1}^{k} e_{ij} Z_{ij}. \qquad (2)$$

Дополнительный дрейф на выходе УПТ, создаваемый остаточными напряжениями на открытых ключах

$$\Delta e_{\text{вых}}^{\text{к.о}} = E_{\text{к.о}} (m - 1) \frac{R_{\text{д}}^{p} + Z_{\text{о.с}}}{R_{\text{д}}}. \tag{3}$$

Дополнительный дрейф от закрытого ключа, подключенного к рабочей квазисуммирующей точке

$$\Delta e_{\text{вых}}^{\text{к.з}} = e_{\text{к.з}}^{0} \frac{Z_{\text{о.с}}^{p}}{r_{\text{к.з}}}. \tag{4}$$

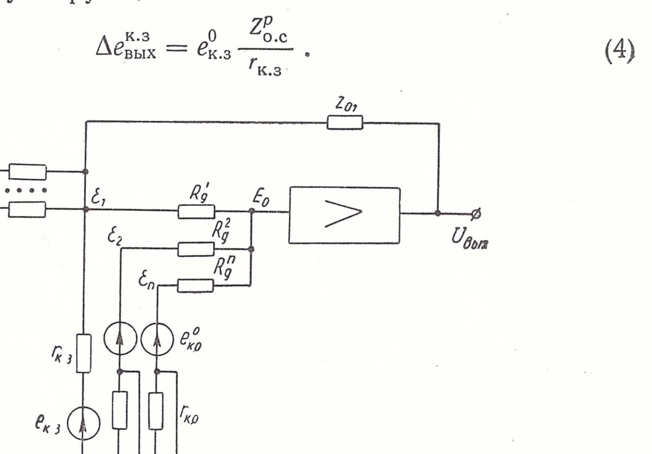



Рис. 3.

Полный дополнительный дрейф

$$\Delta e_{\text{вых}} = \Delta e_{\text{вых}}^{\text{к.0}} + \Delta e_{\text{вых}}^{\text{к з}},$$

$$\Delta e_{\text{вых}} = e_{\text{к.з}}^{0} \frac{Z_{\text{о.с}}^{p}}{r_{\text{к.з}}} + (m - 1) \frac{R_{g}^{p} + Z_{\text{о.с}}}{R_{\text{д}}} \sum_{i=1}^{m-1} (e_{\text{к.о}_i}^{0} + r_{\text{к.о}_i} I_{\text{вх}_i}). \tag{5}$$

Полученное выражение для полного дополнительного дрейфа на выходе многооперационного усилителя позволяет выработать требования к ключу, а также выбрать значение сопротивлений $R_{\text{д}}$, соединяющих квазисуммирующие точки со входом УПТ.

Сопротивление $R_{\text{д}}^{\text{р}}$, связывающее рабочую квазисуммирующую точку, желательно иметь малой величины, в то время как остальные сопротивления $R_{\text{д}}$, подсоединенные открытыми ключами на землю, должны быть большой величины. Использование в качестве $R_{\text{д}}$ нелинейного сопротивления, составленного из двух параллельно соединенных кремниевых диодов (анод к катоду), позволяет получить разную величину сопротивления для рабочей и для отключенных квазисуммирующих точек.

У диодов, соединенных таким образом, для малых приложенных напряжений очень большое сопротивление и при увеличении напряжения это сопротивление резко падает. Диоды, служащие в данный момент $R_{д}^{р}$ (подключающие рабочую квазисуммирующую точку), оказываются включенными в цепь обратной связи для остаточных напряжений на открытых ключах. Поэтому к $R_{д}^{р}$ прикладывается напряжение $\Delta e_{вых}$ и сопротивление этих диодов становится значительно меньше сопротивления остальных диодов (являющихся входными сопротивлениями для напряжения дрейфа).

Таким образом, существенно нелинейный характер сопротивлений $R_{д}$ позволяет уменьшить дополнительный дрейф от неидеальности ключей.

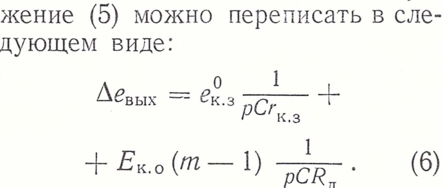



Рис. 4.

Если во включенной операционной части $Z_{о.с} = C$, то выражение (5) можно переписать в следующем виде:

$$\Delta e_{вых} = e_{к.з}^{0} \frac{1}{pCr_{к.з}} + E_{к.о}(m - 1) \frac{1}{pCR_{д}}. \qquad (6)$$

Постоянная времени интегрирования остаточных напряжений на открытых ключах $\tau_{к.о} = CR_{д}$ получается большой ($50 \div 60$ *сек*) при $C = 1$ *мкф*, поэтому дополнительный дрейф при интегрировании невелик.

Проектирование ключа для многооперационных усилителей производилось с учетом влияния неидеальности его параметров на дрейф выходного напряжения (фурмулы (5) и (6)). Основное внимание было обращено на уменьшение остаточного напряжения на ключевом триоде в открытом и закрытом состояниях. Закрытый ключ в каждом многооперационном усилителе только один и поэтому более существенно влияние открытых ключей.

Схема ключа показана на рис. 4. Для уменьшения остаточного напряжения на открытом ключе в открытом состоянии используется инверсное включение триода $T_1$. Кремниевый диод $Д_2$ служит для уменьшения положительного тока в базу закрытого триода, так как этот ток вызывает большое остаточное напряжение. (Диод уменьшает это напряжение с $30 \div 40$ *мв* до $0{,}5 \div 1$ *мв*.). Схема ключа выполнена аналогично схеме инвертора потенциальной системы элементов, на которых построено УЛУ, и поэтому ключ легко управляется от УЛУ. Усредненные параметры ключа при использовании триодов П42Б:

$r_{к.о} = 5$ *ом*; $r_{к.з} = 2 \div 3$ *Мом*; $e_{к.о}^{0} = 3 \div 4$ *мв*; $e_{к.з}^{0} = 0{,}5 \div 1$ *мв*.

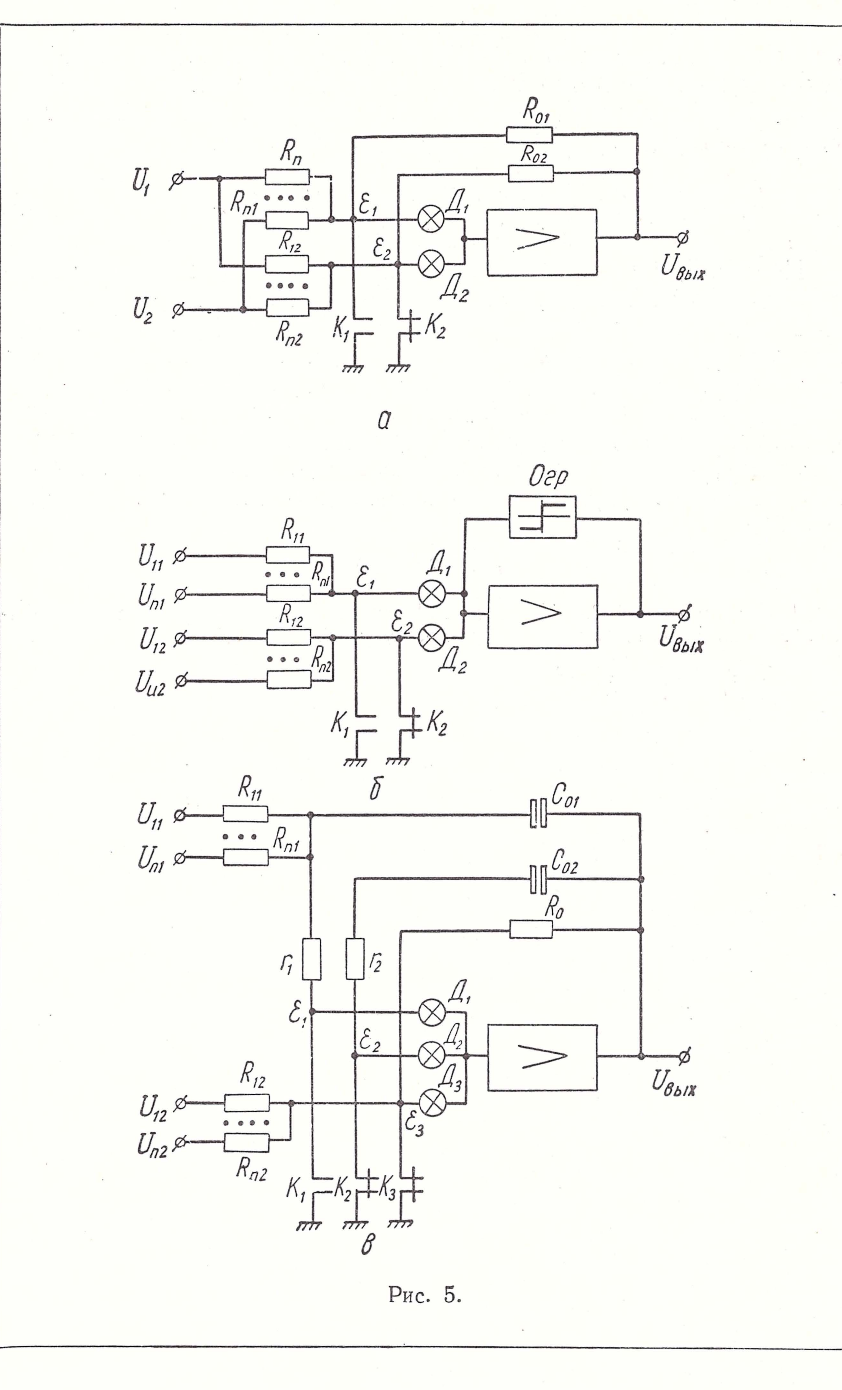

U1
U2
Rп
Rп1
R12
Rп2
R01
R02
Е1
Е2
Д1
Д2
K1
K2
Uвых
а
Огр
U11
Uп1
U12
Uи2
R11
Rп1
R12
Rп2
б
C01
C02
R0
r1
r2
Е3
Д3
K3
Uп2
в

Рис. 5.

Рассмотрим некоторые практические схемы многооперационных усилителей. На рис. 5 показаны экспериментально проверенные усилители на две и три квазисуммирующие точки.

Многооперационный усилитель по схеме рис. 5, *а* позволяет изменять состав (коэффициенты передачи) сумматора

$$U_{\text{вых}} = \left[ \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{R_{\text{о.к}}}{R_{ik}} \right] \qquad (k = 1{,}2). \tag{7}$$

На рис. 5, *б* и *в* показаны двухоперационный нуль-орган и трехоперационный сумматор, интегратор-сумматор с запоминанием.

Таким образом, использование кремниевых диодов для создания квазисуммирующих точек позволяет уменьшить дрейф нуля многооперационных усилителей, особенно при реализации операций запоминания и интегрирования. Изменение операций, реализуемых усилителем, достигается с помощью однотранзисторных ключей, коммутирующих квазисуммирующие точки. Управление ключами производится с управляющего логического устройства (УЛУ).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Самойлов В. Д. — В кн.: Математическое моделирование и электрические цепи. Вып. IV. «Наукова думка», К,. 1966.

Доложено на семинаре
20 мая 1966 г.

# ЛОГИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ САМОНАСТРАИВАЮЩЕЙСЯ МОДЕЛИ

Ю. П. КОСМАЧ, В. Д. САМОЙЛОВ

При построении аналоговых вычислительных машин для решения сложных инженерных задач зачастую применяют принцип многократного использования решающих элементов, что приводит к значительному уменьшению объема аппаратуры. Очевидно, что это возможно лишь в том случае, когда алгоритм решения задачи построен таким образом, что операции выполняются последовательно во времени. При реализации алгоритма блоки и узлы работают по определенной программе, что дает возможность иметь в машине одно решающее устройство (блок операционных усилителей), которое вместе с другими блоками машины последовательно реализует операции алгоритма решения задачи. Вместе с тем возникает необходимость в запоминающих устройствах для хранения информации, полученной в результате промежуточных вычислений. Соединение блоков по заданной программе должно обеспечивать устройство управления. Очевидно, такая аналоговая вычислительная машина по своей структуре и работе в некотором смысле подобна универсальной цифровой машине.

В настоящей работе рассматривается возможность построения устройства управления на дискретных элементах для аналоговых машин на примере построения логического автомата самонастраивающейся электронной модели для решения краевых задач.

Алгоритм решения краевой задачи заключается в комбинированном применении метода скорейшего спуска и метода Ньютона [1]. Метод скорейшего спуска дает быструю сходимость вдали от искомых корней уравнения; с приближением к корням сходимость резко ухудшается. Поэтому поправки к начальному вектору на последующих шагах итерационного цикла определяются методом Ньютона, который дает хорошие результаты вблизи от искомых корней. Такая комбинация методов решения позволяет получить удовлетворительные результаты практически для всех задач.

Опишем кратко алгоритм решения краевой задачи.

Пусть имеем систему уравнений

$$\frac{dY}{dt} = F(Y,\ t) \tag{1}$$

с ограничениями

$$\Gamma[Y(t_0), \ldots, Y(t_i), \ldots, Y(t_k)] = 0, \tag{2}$$

где $t$ — независимое переменное; $Y$ — вектор решения; 0, $i$ и $k$ — моменты времени на промежутке интегрирования. Необходимо найти такой задающий вектор $Z$, чтобы определяемый им вектор решения $Y$ удовлетворял системе (2).

Процесс решения задачи происходит следующим образом. По выбранному вектору $Z_0$ и приращениях его компонент определяются коэффициенты матрицы уравновешивания. Найденная матрица уравновешивания используется на первом шаге для уточнения определяющего вектора методом скорейшего спуска. После этого находится новое значение матрицы уравновешивания, и на последующих шагах определяющий вектор уточняется методом Ньютона до тех пор, пока процесс нахождения поправок будет сходящимся. В противном случае определяется новое значение матрицы уравновешивания.

Описанный алгоритм можно записать математически:

$$\Delta Z \to Z_0 \to P(Z, t) = Y_0, \tag{3}$$

$$\frac{dY}{dt} = F(Y, t), \tag{4}$$

$$\Gamma[Y(t_0), \ldots, Y(t_i), \ldots, Y(t_k)] = \varepsilon, \tag{5}$$

$$G = \frac{\Delta\varepsilon}{\Delta Z} \tag{6}$$

$$Z = Z_0 - \frac{(\varepsilon,\ GG'\varepsilon)}{(GG'\varepsilon,\ GG'\varepsilon)}\, G'\varepsilon, \tag{7}$$

$$Z_2 = Z_1 - G^{-1}\varepsilon_1 \tag{8}$$

Для решения нелинейной краевой задачи 8-го порядка с восьмью нелинейными зависимостями на аналоговых блоках по алгоритму (3) — (8) понадобилось бы 156 усилителей постоянного тока. Применив принцип многократного использования решающих блоков, число УПТ можно сократить до 32.

Запишем формульный алгоритм решения краевой задачи (3) — (8) в виде направленного графа. Этот граф, являющийся предва-

рительным при построении управляющего логического устройства, приведен на рис. 1.

Для упрощения полный предварительный граф изображен в виде нескольких подграфов, каждый из которых соответствует определенному режиму работы модели.

Вершина $H$ соответствует преобразованию вектора $Z$ в вектор начальных условий $Y_0$ (выражение (3) алгоритма решения). Интегрированию системы дифференциальных уравнений (4) соответствует вершина $M$. Вершины $K_t$ и $K_т$ соответствуют реализации краевых условий (5).

Определение коэффициентов матрицы уравновешивания производится следующим образом. Выбранный задающий вектор $Z_0$ преобразуется в вектор начальных условий и решается система дифференциальных уравнений. Вектор решения подставляется в краевые условия и полученный вектор невязок $\varepsilon$ запоминается. Этому режиму соответствует подграф рис. 1, *а*. После этого первой компоненте вектора $Z_0$ задается приращение и снова решается система дифференциальных уравнений. От полученного вектора невязок $\varepsilon_1$ покомпонентно вычитается вектор невязок $\varepsilon$. Коэффициенты первого столбца матрицы уравновешивания определяются в результате деления вектора разностей $\Delta\varepsilon_1$ на приращение первой компоненты определяющего вектора $\Delta Z_1$. Аналогично находятся коэффициенты всех столбцов матрицы. Режиму определения коэффициентов матрицы уравновешивания соответствуют подграфы рис. 1, *б* и *в*.

Уравновешивание методом скорейшего спуска производится согласно выражению

$$\Delta Z = -\frac{(\varepsilon, GG'\varepsilon)}{(GG'\varepsilon, GG'\varepsilon)} G'\varepsilon. \qquad (9)$$

В выражение (9) входит два скалярных произведения, частное от деления которых умножается на вектор. Следовательно, для реализации этого выражения необходимо два такта на порядок: первый такт — деление, второй — умножение. Так как мерность матрицы $G$ и вектора $\varepsilon$ равна четырем, то для реализации (9) необходимо восемь тактов.

Режиму уравновешивания методом скорейшего спуска соответствует подграф рис. 1, *г*.

При уравновешивании методом Ньютона необходимо иметь индикатор сходимости. Для этого в модели вычисляется на каждом шаге уравновешивания длина вектора невязок $\lambda = \sum_{i=1}^{4} |\varepsilon_i|^2$ и сравнивается с длиной, вычисленной на предыдущем шаге. В случае увеличения $\lambda$ выдается команда на уточнение матрицы $G$. Для определения $\lambda$ необходимо 4 такта.

Режиму уравновешивания методом Ньютона соответствует подграф рис. 1, *д*.

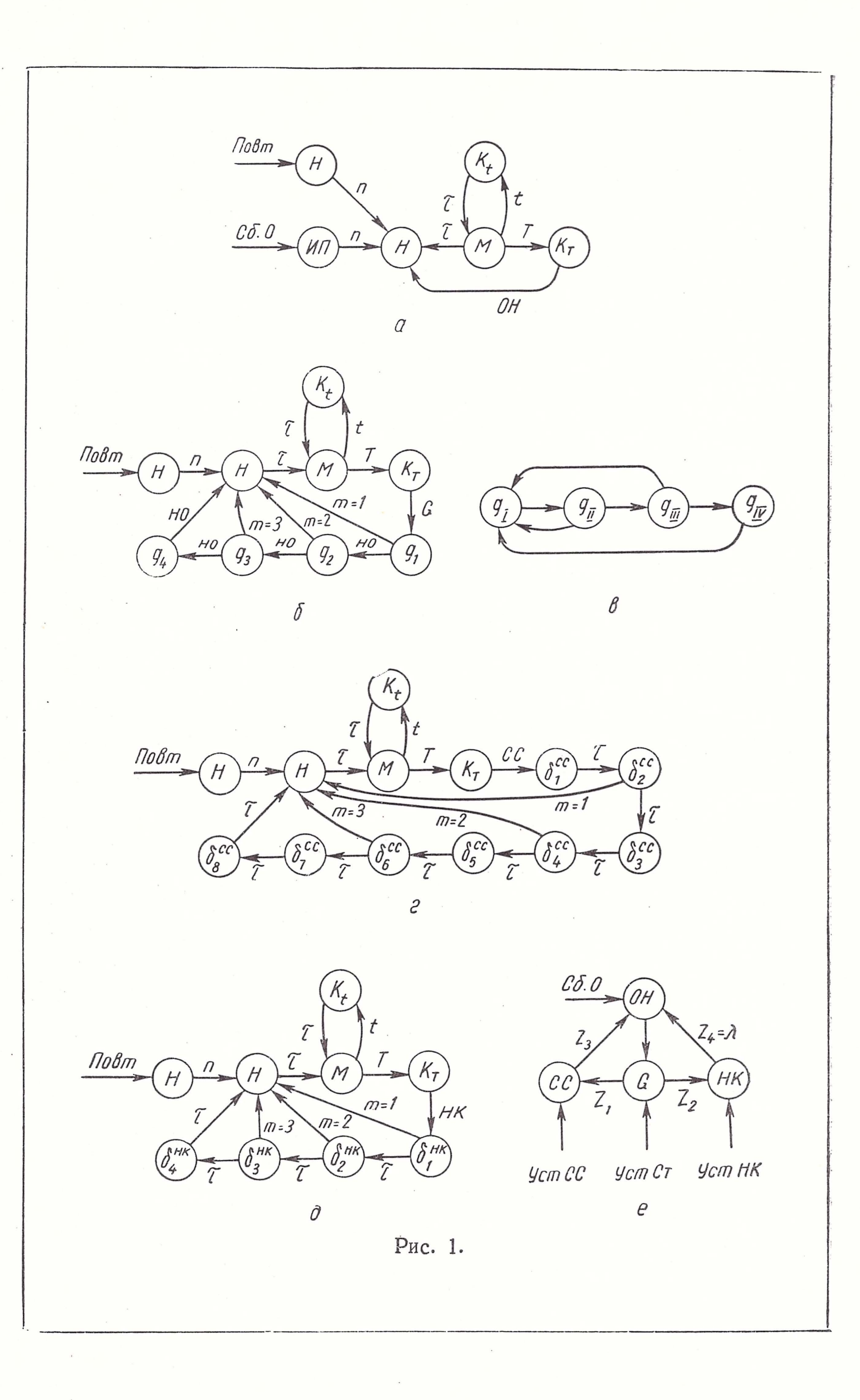

Повт
Сб.О
ИП
Н
М
$K_t$
$K_т$
ОН
а
б
в
г
д
е
$g_1$
$g_2$
$g_3$
$g_4$
НО
$m=1$
$m=2$
$m=3$
$\delta_1^{cc}$
$\delta_2^{cc}$
$\delta_1^{НК}$
$\delta_2^{НК}$
СС
НК
G
$Z_1$
$Z_2$
$Z_3$
$Z_4=\lambda$
Уст СС
Уст Ст
Уст НК

Рис. 1.

На рис. 1,*е* приведен подграф управления режимами модели при реализации алгоритма (3) — (8). Вершина ОН соответствует определению невязок, $G$ — вычислению коэффициентов матрицы уравновешивания; СС и НК — уравновешиванию методами скорейшего спуска и Ньютона.

Для управления порядком включения аналоговых блоков и изменением этого порядка в процессе решения задачи необходимо управляющее логическое устройство (УЛУ), способное производить логическое преобразование входных сигналов и задавать программу работы машины в соответствии с графом рис. 1.

Методы реализации автоматов для управления аналоговыми моделями освещены в ряде работ Однако в каждом отдельном случае построение логического автомата производится для конкретных методов решения задач. Исходя из предложенного алгоритма, строится специализированный цифровой логический автомат. Реализация нового автомата при изменении алгоритма вызывает большие затраты времени и средств. Поэтому возникает задача выбора элементов цифровой техники и методики синтеза автоматов из этих элементов, наиболее полно удовлетворяющих следующим требованиям:

а) наличие небольшого набора надежных логических элементов;

б) простота и удобство коммутации логических элементов между собой;

в) наличие простой инженерной методики синтеза автоматов из этих элементов;

г) построение автоматов, позволяющих менять программу их работы путем небольшого изменения их структуры;

д) удобство подачи управляющих сигналов на аналоговые блоки;

е) простота ввода сигналов с модели на автомат.

Кратко остановимся на некоторых преимуществах и недостатках основных систем элементов дискретной техники для реализации логических автоматов, управляющих аналоговой моделью. Импульсные и потенциально-импульсные элементы требуют специального формирования импульсных входных команд из выходных сигналов модели. Перестройка автомата на новую программу очень сложна. Возникают также трудности при настройке таких автоматов. Надежность схем невысока.

Иногда реализуют автоматы на газоразрядных приборах. К преимуществам этих схем можно отнести наличие в них индикации о включенном состоянии. Их целесообразно применять для кольцевых счетчиков с выводом визуальной индикации и неуправляемых программных распределителей временных интервалов.

Наиболее полно требованиям, предъявляемым к элементам для синтеза автоматов, удовлетворяют потенциальные элементы. Надежность схем на этих элементах значительно выше, чем у импульсных и потенциально-импульсных элементов. Полный набор потенциальных элементов, достаточный для реализации любых автома-

тов, невелик. Достаточно разработана и четко определена методика структурного синтеза автоматов. Такие автоматы имеют хороший стык друг с другом и с аналоговой машиной. Имеется возможность конструктивно выполнить логический автомат на потенциальных элементах так, чтобы легко перестроить программу его работы.

Для практической реализации автомата на потенциальных элементах, работающего в соответствии с графом рис. 1, необходимо преобразовать этот граф к виду, пригодному для структурного синтеза с учетом следующих правил и ограничений:

1. Каждому состоянию предварительного графа соответствует не менее двух состояний окончательного, для возможности дешифрации состояний с помощью комбинационных схем, реализующих функции возбуждения.

2. Окончательный граф желательно разбить на подграфы, связанные управляющими командами (опыт показал, что наибольшая экономия радиодеталей достигается при разбиении на подграфы с тремя — четырьмя переменными).

3. Каждый подграф должен допускать соседнее кодирование.

4. При необходимости увеличить время нахождения в данном состоянии, этому состоянию в окончательном графе ставится в соответствие необходимое количество вершин. Для задания больших временных интервалов ставятся дополнительно счетчики.

5. Должно быть соблюдено правильное чередование тактовых и полутактовых сигналов, управляющих переходами в графе. Если переход к данному состоянию осуществляется по такту, то все переходы из этого состояния должны быть по полутакту и наоборот.

6. Управляющие команды следует снимать с переходов в подграфе на ведущих в состояние, к которому есть переходы с иных состояний.

Окончательный граф программы работы УЛУ самонастраивающейся машины для решения краевых задач, полученный после преобразования предварительного графа, представлен на рис. 2. Он состоит из четырех подграфов $A$, $B$, $C$, $D$. Кодирование состояний подграфов осуществлялось с помощью карт Карнау, в которых соседние коды расположены в соседних клетках, т. е. при переходе от клетки к клетке меняется только одна булева переменная.

Каждой из использованных клеток карты Карнау присвоен номер, соответствующий номеру одного из кружков подграфа. Таким образом, каждому кружку подграфа присваивается определенный код по карте Карнау. Около стрелок, соединяющих кружки подграфа, соответствующие состояниям подавтомата, проставлены управляющие сигналы, переводящие подавтомат в новое состояние.

Кроме того, около каждого подграфа записаны выражения, по которым формируются входные управляющие команды.

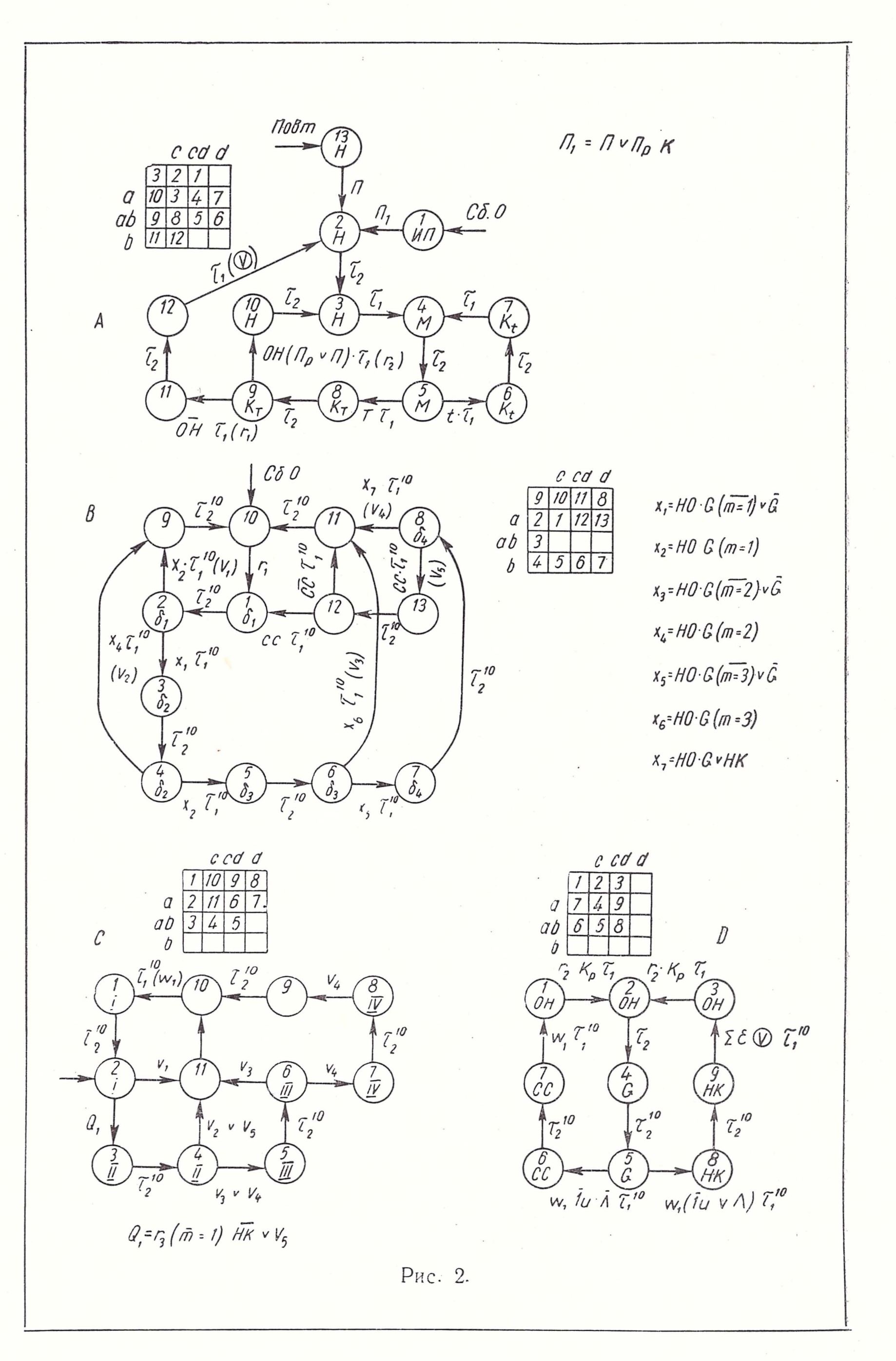

Повт
П₁ = П ∨ Пр К
Сб.О
A
B
Сб О
x₁=НО·G(m̄=1)∨Ḡ
x₂=НО G(m=1)
x₃=НО·G(m̄=2)∨Ḡ
x₄=НО·G(m=2)
x₅=НО·G(m̄=3)∨Ḡ
x₆=НО·G(m=3)
x₇=НО·G∨НК
C
D
Q₁=r₃(m̄=1) H̄K ∨ V₅

Рис. 2.

В соответствии с буквами в кружках подграфов, которыми обозначены выходные команды, выбираются схемы совпадения, формирующие команды управления моделью.

Команды с данного подавтомата, управляющие другим подавтоматом, записаны в скобках около перехода, с которого они снимаются.

Структурный синтез автомата из элементов потенциальной системы проводится достаточно легко по методике, изложенной в [2], [3], при наличии окончательного графа.

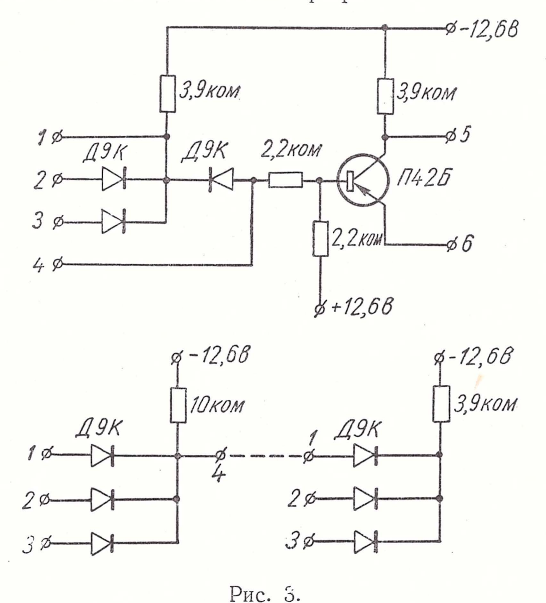



Рис. 3.

В результате синтеза получаются функции возбуждения потенциальных триггеров. Количество потенциальных триггеров, необходимое для реализации данного подавтомата, равно количеству переменных соответствующей карты Карнау.

В связи с тем, что частота работы автомата низкая, не выше 100 *гц*, для реализации автомата были использованы упрощенные элементы с двухступенчатой логикой. Полный набор элементов включающий инвертор и диодные схемы совпадения, показан на рис. 3. Потенциальный триггер составляется из двух инверторов.

На аналогичных элементах собраны и другие цифровые узлы (счетчики, генератор тактов), имеющиеся в машине.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Пухов Г. Е., Грездов Г. И., Верлань А. Ф. Методы решения краевых задач на электронных моделях. «Наукова думка», К., 1965.

2. Мацевитый Л. В. Синтез устройств ЦВМ из элементов потенциального типа. Материалы научных семинаров по теоретическим и прикладным вопросам кибернетики, КДНТП, К., 1963.

3. Мацевитый Л. В. Особенности этапа структурного синтеза при использовании элементов потенциальной системы. Материалы научных семинаров по теоретическим и прикладным вопросам кибернетики, КДНТП, К., 1966.

Доложено на семинаре
4 марта 1966 г.

6 7-2622

# ШИРОКОПОЛОСНЫЙ КВАДРАТОР ДЛЯ АНАЛОГОВОГО МНОЖИТЕЛЯ

В. К. САРАНЧУК, А. П. ТИПИКИН

В множительных устройствах аналоговых вычислительных машин (АВМ), основанных на соотношении

$$XY = \frac{1}{4}[(X+Y)^2 - (X-Y)^2], \qquad (1)$$

применяются квадраторы, построенные на нелинейных полупроводниковых сопротивлениях (НПС) или на диодах по принципу кусочно-линейной аппроксимации [1—5].

Сильная зависимость вольт-амперной характеристики НПС от температуры (температурный коэффициент составляет 2—3% на 10° С [4]) не позволяет уменьшить погрешность квадраторов на НПС менее 1% от максимального значения выходного сигнала, даже в случае применения специальных схем термокомпенсации на термосопротивлениях [4]. Квадраторы, построенные на НПС, имеют узкий диапазон выходного сигнала (мгновенная относительная погрешность составляет 5% в диапазоне, равном 30). Под мгновенной относительной погрешностью $\delta_м$ понимается отношение абсолютной погрешности $\Delta$ к ожидаемому точному значению выходного сигнала в той точке, где определена абсолютная погрешность [5]

$$\delta_м = \frac{\Delta}{U_т} = \frac{|U_р - U_т|}{U_т}, \qquad (2)$$

где $U_т$ — точное значение выходного сигнала; $U_р$ — реальное значение выходного сигнала. Рабочий диапазон частот, ограничиваемый появлением дополнительной динамической погрешности 2—3% от максимального значения выходного сигнала, составляет $0 < f < 100$ *гц*.

Квадраторы, построенные по принципу кусочно-линейной аппроксимации, обладают значительно более высокой точностью, стабильностью и широким рабочим диапазоном частот. Эти устройства позволяют получить относительную погрешность 0,1% при мгно-

венной относительной погрешности не более 2% в диапазоне выходного сигнала, равном 100 [5]. Рабочий диапазон частот (при дополнительной динамической погрешности не более 1%) составляет $0 < f < 5000$ *гц*. Достижение указанной точности требует применения около 20 диодов и стабильного источника опорного напряжения. Существенными недостатками этих квадраторов являются наличие разрывов в первой производной и сравнительно узкий динамический диапазон выходного сигнала (у современных линейных решающих элементов АВМ мгновенная погрешность не превышает 1—2% в диапазоне выходного сигнала, равном 1000). Дальнейшее расширение динамического диапазона, равносильное уменьшению мгновенной погрешности при малых значениях выходного сигнала, требует резкого увеличения количества диодов. Это не имеет смысла, так как общая погрешность может не снизиться, а увеличиться из-за погрешности, вносимой самими диодными элементами [1].

В связи с изложенным выше возникает необходимость в построении простого по конструкции квадратора, удовлетворяющего следующим требованиям: 1) сравнительно небольшой объем оборудования и небольшая потребляемая мощность; 2) относительная погрешность не более 0,1% от максимального значения выходного сигнала; 3) широкий динамический диапазон выходного сигнала и рабочий диапазон частот, близкие к соответствующим диапазонам линейных решающих элементов; 4) непрерывность первой производной; 5) высокая температурная и временная стабильность в лабораторных условиях (диапазон изменения температуры окружающей среды: $\Theta_0 = 10 \div 60°$ С).

## Принцип действия. Способ настройки

При построении данного квадратора применен принцип кусочно-нелинейной аппроксимации. В качестве нелинейных элементов использованы начальные участки прямых ветвей вольт-амперных характеристик кремниевых диодов. Схема включения диодов для осуществления кусочно-нелинейной аппроксимации показана на рис. 1. При последовательном включении диодов (количество их $n$ колеблется в пределах от 10 до 15) потенциальные барьеры отдельных диодов задают шаг разбиения оси аргумента, а их сумма — интервал определения воспроизводимой функции. Делитель напряжения на сопротивлениях $r_1$, $r_2$ позволяет расширить интервал определения функции до 100 *в*. Приведенная схема воспроизводит в одном квадранте монотонно возрастающие функции, имеющие нулевое значение первой производной в начале координат, например, степенные функции $Y = X^a$. Настройка устройства осуществляется приближением к заданной зависимости $U_{вых} = f(U_{вх})$ путем последовательного попарного изменения сопротивлений $r_1$ и $R_1$, $R_1$ и $R_2$, $R_2$ и $R_3$ (при незначительном изменении $R_1$), $R_3$

и $R_4$ (при незначительном изменении $R_2$) и т. д. Такой принцип последовательной настройки возможен благодаря значительной высоте потенциального барьера у кремниевых диодов. При этом изменение любого $R_i$ сопротивления влияет на настройку предыдущего $(i-1)$-го элемента. На настройку остальных предыдущих элементов, т. е. $(i-2)$, $(i-3)$-го и т. д., изменение сопротивления $R_i$ практически не оказывает влияния. Суммарное сопротивление делителя $(r_1 + r_2)$ рекомендуется выбирать таким образом, чтобы во всем диапазоне изменения выходного сигнала $I_{вх} > I_1$ (рис. 1). Наибольшая точность настройки была получена при применении

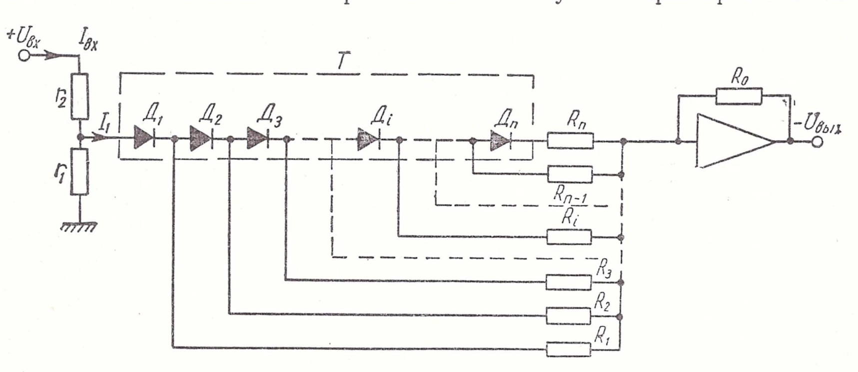



Рис. 1. Принципиальная схема квадратора.

микросплавных кремниевых диодов Д219, Д220, Д223. Диоды следует отбирать по величине обратного тока.

Основными недостатками данного устройства являются: 1) невозможность расчета ввиду значительного разброса характеристик диодов; 2) зависимость характеристик диодов от температуры окружающей среды. Эти же недостатки присущи и широко применяемым нелинейным полупроводниковым сопротивлениям. Кремниевые диоды при сравнимой с НПС температурной нестабильности обладают следующими преимуществами: 1) значительно больший рабочий диапазон частот (например, диод Д223 имеет максимальное значение рабочей частоты 20 *мгц*); 2) значительно меньший габарит; 3) герметичность. Благодаря последним двум факторам можно построить простую и малогабаритную систему их термостатирования. В лабораторных условиях (диапазон температур 10—60° С) можно обеспечить достаточную стабильность характеристик кремниевых диодов поддержанием температуры в термостате на уровне $\Theta_т = 70 \pm 0{,}1°$ С.

## Система термостатирования диодов

Для поддержания постоянной температуры окружающей среды диодов построена система автоматического регулирования, основными конструктивными элементами которой являются термостат

и усилитель. В термостат были помещены диоды, датчик температуры и нагревательный элемент. В качестве датчика использовалось термосопротивление $R_т$ (рис. 2). Температура задавалась соответствующей установкой задающего постоянного сопротивления $R_0$ в плече делителя напряжения, противоположном $R_т$. Система регулирования поддерживает постоянную температуру в статике путем непрерывного выравнивания мощности нагревания и мощности, рассеиваемой термостатом.

Применен усилитель переменного тока (рис. 2), что позволило практически исключить дрейф нулевого уровня. Фазочувствитель-

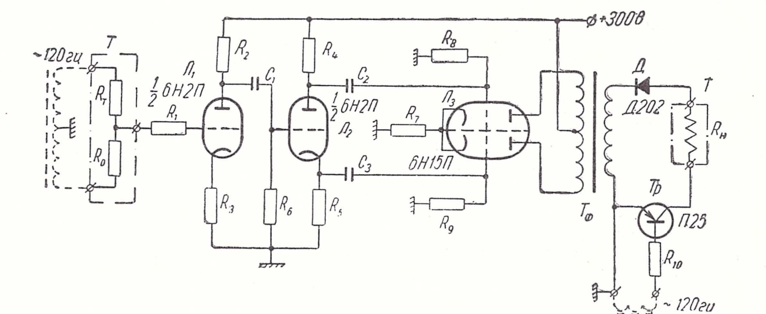



Рис. 2. Принципиальная схема усилителя системы термостатирования диодов.

ный детектор (транзистор П25) и диод (Д202) на выходе усилителя включены для того, чтобы осуществлять нагревание только при значениях температуры в термостате, меньших заданной ($\Theta_т < \Theta_з$), а при $\Theta_т > \Theta_з$ (в случае перерегулирований, когда фаза переменного сигнала на входе усилителя изменяется на 180°) нагревание прекращать. Усилитель рассчитан на стандартные напряжения питания современных АВМ на электронных лампах. Выходной каскад имеет запас по мощности, достаточный для выведения термостата в режим за 30 *мин*. Статическая ошибка системы регулирования составляет 0,1° С.

В качестве теплоизолирующих материалов для термостата использовались хлопковая вата и пенопласт. Внутренняя полость термостата заполнялась трансформаторным маслом для поддержания приблизительно одинаковой температуры по всему внутреннему объему. Выводы из внутренней полости через теплоизолятор осуществляются тонким проводом. Рассеиваемая мощность термостата составляет 1 *вт* при $\Theta_0 = 20°$ С и $\Theta_т = 70°$ С. Термостат, применяемый в данном устройстве, вмещает 40 диодов типа Д223. Диоды необходимо экранировать от нагревательного элемента общей точкой сигнала, что позволяет значительно уменьшить утечку от нагревателя на вход решающего усилителя. Нагревательный элемент следует применить транспонированный во внутренней полости

термостата (например, рядовая намотка на рамку). Это повышает равномерность нагревания и стабильность системы автоматического регулирования температуры.

## Экспериментальная проверка точности и рабочего диапазона частот квадратора

При изготовлении опытного образца устройства была осуществлена настройка двух ветвей параболы во втором и четвертом квадрантах. Для настройки одной ветви параболы потребовалось 10 диодов.

Таблица 1

| $U_{вых}$ | $\delta_м$, % |
|---|---|
| 0,01 | 30 |
| 0,1 | 2 |
| 0,2 | 1,5 |
| 0,5 | 1 |
| 1 | 1 |
| 2 | 0,5 |
| 5 | 0,3 |
| 10 | 0,2 |
| 50 | 0,1 |
| 100 | 0,1 |

Исследование статической погрешности квадратора осуществлялось при разных значениях температуры окружающей среды в диапазоне $\Theta_0 = 10 \div 60°$ C и при периодической проверке мгновенной погрешности в течение 500 *час* работы устройства. Максимальные значения мгновенной погрешности, определенные по формуле (2), сведены в табл. 1.

Проведенные исследования показывают, что относительная погрешность квадратора не превышает 0,1%. Мгновенная относительная погрешность не превышает 2% в диапазоне выходного сигнала: 1000.

Динамическая погрешность квадратора определялась при наблюдении на экране осциллографа реализуемой кривой $I_1 = f(U_{вх})$ при переменной частоте входного синусоидального сигнала. Наблюдалась кривая $I_1 = f(U_{вх})$, а не $U_{вых} = f(U_{вх})$, чтобы исключить динамическую погрешность решающего усилителя. Из полученных осциллограмм (рис. 3) (*а* — $f_{вх} = 1000$ *гц*; *б* — $f_{вх} = 2000$ *гц*; *в* — $f_{вх} = 4000$ *гц*; *г* — $f_{вх} = 10\,000$ *гц*) видно, что значительные отклонения от ожидаемой точной кривой появляются при частоте входного сигнала 10 000 *гц*. Максимальным значением рабочей частоты квадратора является 4000 *гц* (при дополнительной динамической погрешности не более $1 \div 2\%$ от максимального значения выходного сигнала).

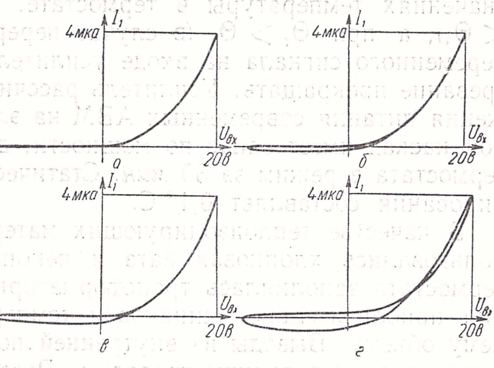


Рис. 3. Частотные характеристики квадратора.

## Множитель

Рассмотренный выше принцип построения квадратора использован для повышения точности, расширения динамического диапазона выходного сигнала и рабочего диапазона частот аналоговых множительных устройств, основанных на соотношении (1). При разработке схемы множителя возникла задача повышения точности схем выделения модуля возводимого в квадрат сигнала. Применяемые в настоящее время в этих схемах вакуумные диоды вносят большую погрешность при малых значениях входного сигнала из-

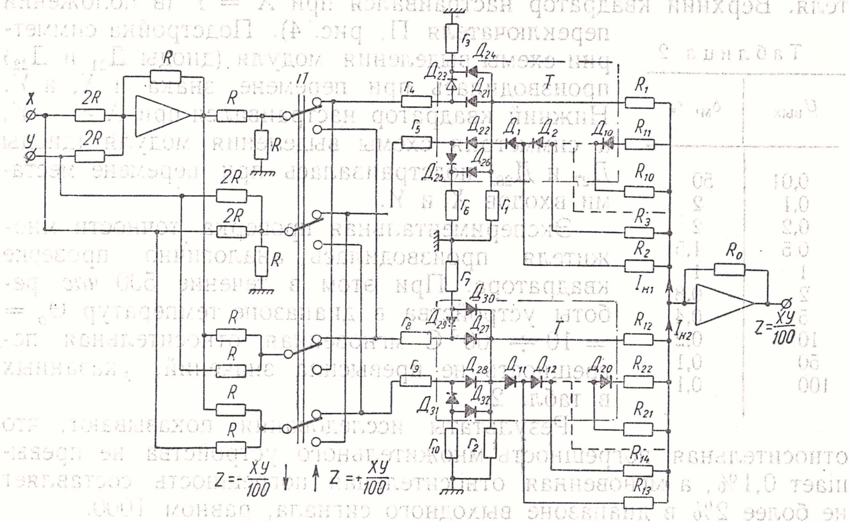



Рис. 4. Принципиальная схема множительного устройства.

за значительной величины начального тока. Наиболее успешным оказалось применение кремниевых диодов, прямые ветви характеристик которых дополнительно использовались при настройке начальных участков парабол (диоды $Д_{21}$ и $Д_{22}$, $Д_{27}$ и $Д_{28}$, рис. 4). Для достижения высокой точности необходимо, чтобы вольт-амперные характеристики диодов были попарно ($Д_{21}$ и $Д_{22}$, $Д_{27}$ и $Д_{28}$) достаточно близки в рабочем диапазоне токов. Учитывая разброс вольт-амперных характеристик диодов, их сблизили подбором пар диодов и последующей их корректировкой с помощью специальных схем коррекции, построенных на диодах $Д_{23}$ ($Д_{29}$), $Д_{24}$ ($Д_{30}$), $Д_{25}$ ($Д_{31}$), $Д_{26}$ ($Д_{32}$) и сопротивлениях $r_4$ ($r_8$), $r_5$ ($r_9$), $r_6$ ($r_{10}$). Все диоды для повышения стабильности устройства помещены в термостат, рассмотренный ранее. Сближение вольт-амперных характеристик диодов в парах $Д_{21}$ и $Д_{22}$, $Д_{27}$ и $Д_{28}$ осуществлялось по трем точкам в рабочем диапазоне токов нагрузки схем выделения модуля (при максимальном, минимальном и среднем значениях). При максимальном значении тока нагрузки подстройка осуществлялась изменением сопротив-

лений $r_4$, $r_5$ ($r_8$, $r_9$) в диапазоне 0—300 *ом*, причем для простоты настройки одно из них, или $r_4$ ($r_8$), или $r_5$ ($r_9$), принималось равным нулю. При минимальном и среднем значениях тока нагрузки подстройка осуществлялась изменением сопротивлений $r_3$ ($r_7$) и $r_6$ ($r_{10}$). В результате указанной подстройки максимальное отклонение тока нагрузки схемы выделения модуля $I_н$ (ток, потребляемый квадратором) из-за несимметрии диодов в указанных выше парах сведено к $\Delta I_н = 0{,}001$ *мка* в рабочем диапазоне $0{,}1 \div 100$ *мка*.

Квадраторы настраивались непосредственно в схеме множителя. Верхний квадратор настраивался при $X = Y$ (в положении переключателя П, рис. 4). Подстройка симметрии схемы выделения модуля (диоды $Д_{21}$ и $Д_{22}$) производилась при перемене знака и $X$, и $Y$. Нижний квадратор настраивался при $X = -Y$, а симметрия схемы выделения модуля (диоды $Д_{27}$ и $Д_{28}$) подстраивалась при перемене местами входов $X$ и $Y$.

Таблица 2

| $U_{вых}$ | $\delta_м$, % |
|---|---|
| 0,01 | 50 |
| 0,1 | 2 |
| 0,2 | 2 |
| 0,5 | 1,5 |
| 1 | 1 |
| 2 | 0,8 |
| 5 | 0,4 |
| 10 | 0,2 |
| 50 | 0,1 |
| 100 | 0,1 |

Экспериментальная проверка точности множителя производилась аналогично проверке квадратора. При этом в течение 500 *час* работы устройства в диапазоне температур $\Theta_o = 10 \div 60°\,C$ мгновенная относительная погрешность не превысила значений, указанных в табл. 2.

Результаты исследования показывают, что относительная погрешность множительного устройства не превышает 0,1%, а мгновенная относительная погрешность составляет не более 2% в диапазоне выходного сигнала, равном 1000.

Динамическая погрешность множителя определялась в результате умножения синусоидального сигнала переменной частоты и амплитуды 100 *в* на нуль [3]. Выходной сигнал множителя достиг в отличие от идеального нулевого значения 0,1% и 1% от максимального значения выходного сигнала при частотах входного сигнала соответственно 500 и 3000 *гц*.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Коган Б. Я. Электронные моделирующие устройства и их применение для исследования систем автоматического регулирования. Физматгиз, М., 1963.
2. Маслов А. А.— Автоматика и телемеханика, 1957, 4.
3. Гулько Ф. Б.— Автоматика и телемеханика, 1961, 12.
4. Фремке А. В., Мокиенко Д. Н., Кузьмин В. Я.— Известия вузов, Приборостроение, 1965, 4.
5. Латенко И. В. Аналоговые множительные устройства. Гостехиздат, М., 1963.

Доложено на семинаре
16 февраля 1966 г.

# К ВОПРОСУ О СВЯЗИ МЕЖДУ ДИНАМИЧЕСКОЙ ПОГРЕШНОСТЬЮ ОПЕРАЦИИ И ЧАСТОТНЫМИ СВОЙСТВАМИ РЕШАЮЩЕГО УСИЛИТЕЛЯ

А. А. ТЮТИН

Известно, что частотные характеристики решающих усилителей, используемых в линейных операционных блоках аналоговых вычислительных машин (АВМ), должны удовлетворять двум основным требованиям:

1) операционный блок должен быть устойчивым в любом режиме работы (чаще всего используются режимы суммирования и интегрирования) при изменении величин сопротивлений и емкостей в пассивной цепи обратной связи в заданной области значений;

2) установившаяся динамическая погрешность или переходная динамическая погрешность не должны превышать заданной величины.

В работах, опубликованных до написания данной статьи, эти два связанных вопроса рассматривались раздельно: решалась задача об определении оптимальной формы амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) решающего усилителя, исходя из заданного качества переходного процесса [1]; рассматривался вопрос о расчете усилителя на устойчивость и синтезировалась его фазочастотная характеристика (ФЧХ) [2]; исследовались погрешности выполнения операции при заданной форме АЧХ усилителя [3—5]. Исключением является работа Н. Н. Ленова [6], в которой обсуждалась связь между отклонением АЧХ операционного блока от идеальной характеристики и величиной запаса устойчивости по фазе. Однако некоторые из полученных в работе [6] результатов требуют уточнения, особенно в связи с разработкой и применением в операционных блоках АВМ полупроводниковых решающих усилителей.

Целью настоящей работы является повторное рассмотрение связи между погрешностью операции над периодическим входным сигналом в установившемся режиме и частотными свойствами операционного блока с учетом требования устойчивой работы. При этом особое внимание обращается на строгое определение величин,

характеризующих свойства блока. Статья основана на материалах диссертационной работы автора [7]. Аналогичный подход к задаче был использован Д. Е. Полонниковым в его докторской диссертации [8].

Все используемые в статье величины являются функциями комплексной переменной $p$, которая при исследовании установившегося режима полагается равной $j\omega$.

## Коэффициент передачи линейного операционного блока

Схема блока показана на рис. 1. Решающий усилитель, входящий в схему, рассматривается как четерехполюсник с коротко-

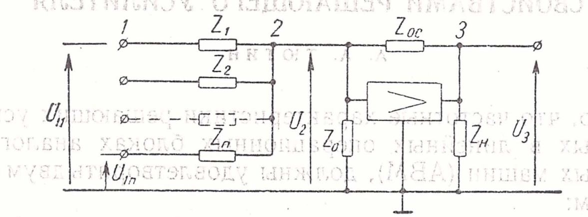



Рис. 1.

замкнутой стороной (трехполюсник), характеризуемый матрицей $y$-параметров:

$$[y] = \begin{vmatrix} y_{aa} & y_{ab} \\ y_{ba} & y_{bb} \end{vmatrix}.$$

Выходное напряжение операционного блока является линейной комбинацией воздействий, каждое из которых обусловлено соответствующим входным напряжением

$$U_{вых} = \sum_{i=1}^{n} H_i U_{вх_i},$$

где $H_i$ — операторный коэффициент передачи * по $i$-му входу [7, 9],

$$H_i = H_{iид} S_1 S_2. \quad (1)$$

Здесь $H_{iид}$ — операторный коэффициент передачи по $i$-му входу идеального операционного блока

$$H_{iид} = \frac{k_{21\ i}}{k_{23\ о.с}}; \quad (2)$$

---

* Здесь и далее подразумеваются коэффициенты передачи по напряжению.

$S = S_1 S_2$ — поправочная функция,

$$S_1 = \frac{1}{1 + \frac{k_{23\,\text{ус}}}{k_{23\,\text{о.с}}}}, \tag{3}$$

$$S_2 = \frac{T}{1+T}; \tag{4}$$

$T$ — «петлевое» усиление,

$$T = -k_{23}k_{32}. \tag{5}$$

Парциальные коэффициенты передачи, входящие в формулы (2) — (5), определяются следующим образом [7—9]:
$k_{21i}$ — коэффициент передачи из $i$-го входного узла в узел *2* (см. рис. 1), определяемый при заземлении узла *3* и всех остальных входных узлов,

$$k_{21i} = \left.\frac{U_2}{U_{1i}}\right|_{\substack{U_{1j}=0 \\ U_3=0}} \quad (j \neq i);$$

$k_{23}$ — коэффициент «обратной» передачи напряжения, т. е. передачи из узла *3* в узел *2* при заземлении всех входных узлов,

$$k_{23} = \left.\frac{U_2}{U_3}\right|_{U_{1.i}=0} = k_{23\,\text{о.с}} + k_{23\,\text{ус}}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n);$$

$k_{32}$ — коэффициент «прямой» передачи напряжения, т. е. передачи из узла *2* в узел *3* —

$$k_{32} = \left.\frac{U_3}{U_2}\right|_{U_{1i}=0} = k_{32\,\text{о.с}} + k_{32\,\text{ус}}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Передача может осуществляться двумя путями — через сопротивление $Z_{\text{о.с}}$ ($k_{23\,\text{о.с}}$) и через усилитель ($k_{23\text{ус}}$). Коэффициент $k_{23\text{о.с}}$ определяется при дополнительном условии, что выход усилителя отключен от узла *3* и заземлен, а $k_{32\text{о.с}}$ — при условии, что вход усилителя отключен от узла *2* и заземлен. Коэффициент $k_{23\text{о.с}}$ находится при дополнительном условии, что сопротивление $Z_{\text{о.с}}$ отключено от выхода усилителя и заземлено, а $k_{32\text{ус}}$ — при условии, что сопротивление $Z_{\text{о.с}}$ отключено от узла *2* и заземлено.

Для схемы рис. 1 в соответствии с указанными выше определе-

ниями можно получить следующие выражения для парциальных коэффициентов передачи [89]:

$$\left.\begin{aligned}
k_{21\,i} &= \frac{1}{\dfrac{Z_i}{Z_{\text{о.с}}} + Z_i \sum\limits_{q=0}^{n} \dfrac{1}{Z_q} + Z_i y_{aa}}, \\
k_{23\,\text{о.с}} &= \frac{1}{1 + Z_{\text{о.с}} \sum\limits_{q=0}^{n} \dfrac{1}{Z_q} + Z_{\text{о.с}} y_{aa}}, \\
k_{23\,\text{ус}} &= \frac{-Z_{\text{о.с}} y_{ab}}{1 + Z_{\text{о.с}} \sum\limits_{q=0}^{n} \dfrac{1}{Z_q} + Z_{\text{о.с}} y_{aa}}, \\
k_{32\,\text{о.с}} &= \frac{1}{1 + \dfrac{Z_{\text{о.с}}}{Z_{\text{н}}} + Z_{\text{о.с}} y_{bb}}, \\
k_{32\,\text{ус}} &= \frac{K_{\text{у.х.х}}}{1 + \dfrac{1}{Z_{\text{о.с}} y_{bb}} + \dfrac{1}{Z_{\text{н}} y_{bb}}} = K_{\text{у.н}},
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

где $K_{\text{у.х.х}}$— коэффициент передачи ненагруженного усилителя:

$$K_{\text{у.х.х}} = -\frac{y_{ba}}{y_{bb}}.$$

Очевидно, что $k_{32\text{ус}}$ — коэффициент передачи нагруженного усилителя при разомкнутой цепи обратной связи ($K_{\text{у.н}}$). Особенностью формул (6) является то, что в них использованы $y$-параметры усилителя (параметры короткого замыкания). Напомним, что $y_{aa}$— это входной параметр четырехполюсника, определяемый при коротком замыкании выходных зажимов ($U_b = 0$); $y_{bb}$ — выходной параметр, определяемый при коротком замыкании входных зажимов ($U_a = 0$). Эти параметры отличаются от входной и выходной проводимостей (соответственно) четырехполюсника из-за наличия обратной передачи, характеризуемой параметром обратной связи $y_{ab}$ (который входит также в выражение для коэффициента $k_{23\text{ус}}$ обратной передачи напряжения через усилитель). Эта особенность проявляется наглядно, если представить усилитель схемой замещения с зависимыми источниками тока (рис. 2, *а*) или напряжения (рис. 2, *б*).

Представление усилителя в виде трехполюсника (четырехполюсника с короткозамкнутой стороной) с $y$-параметрами позволяет более четко определить, что следует называть коэффициентом уси-

ления усилителя без нагрузки и с нагрузкой, и указать, при каких условиях этот коэффициент должен определяться. Подставляя далее выражения (6) в формулы (2) — (5), получим

$$\left.\begin{aligned} H_{i\text{ид}} = -\frac{Z_{\text{о.с}}}{Z_i}, \quad S_1 = \frac{1}{1 - Z_{\text{о.с}} y_{ab}}, \\ T = -(k_{23\,\text{о.с}} + k_{23\,\text{ус}})(k_{32\,\text{о.с}} + k_{32\,\text{ус}}) = \\ = -\frac{1 - Z_{\text{о.с}} y_{ab}}{1 + Z_{\text{о.с}} \sum\limits_{q=0}^{n} \frac{1}{Z_q} + Z_{\text{о.с}} y_{aa}} \left( K_{\text{ун}} + \frac{1}{1 + \frac{Z_{\text{ос}}}{Z_{\text{н}}} + Z_{\text{о.с}} y_{bb}} \right). \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

а

б

Рис. 2.

Выражение для коэффициента передачи $H_i$ операторного блока можно легко получить подстановкой значений (7) в соотношения (4) и (1). Следует, видимо, подчеркнуть, что в линейном операционном блоке (рис. 1) всегда осуществляется передача напряжения в «прямом» и «обратном» направлениях как через сопротивление $Z_{\text{о.с}}$, так и через усилитель. Такие элементы цепи называются двухсторонними. Для цепей с двухсторонними элементами нецелесообразно пользоваться понятием «петля обратной связи», предложенным в свое время для цепи с односторонними элементами.

В связи с этим нужно также отказаться от общепринятого определения петлевого усиления $T$ путем размыкания цепи в некоторой точке [10]. Однако для произведения коэффициентов передачи между узлами цепи с двухсторонними элементами можно сохранить название «петлевое усиление», беря слово «петлевое» в кавычки и отмечая тем самым некоторую условность этого понятия. Подробно этот вопрос рассматривается в работах [11, 12].

Отметим, что общеизвестное выражение для коэффициента передачи линейного операционного блока по $i$-му входу (см., например, работу [2]) получается как частный случай из соотношения (7) при $y_{ab} = 0$, что приближенно верно для ламповых решающих усилителей в диапазоне от нулевой частоты до частоты, при которой усиление ненагруженного усилителя становится равным единице.

## О динамической погрешности операции

Под погрешностью операции принято понимать [13] разность между выходным напряжением идеального операционного блока и выходным напряжением реального блока в данный момент времени

$$\Delta u_{\text{вых}}(t) = u_{\text{вых.ид}}(t) - u_{\text{вых}}(t).$$

При этом, в зависимости от характера процессов в операционном блоке, погрешность операции может вычисляться либо для стационарного (установившегося) режима, либо для переходного режима. Погрешность операции в первом режиме называют погрешностью установившегося режима, во втором режиме — переходной погрешностью [14].

Ошибки операционного блока, связанные с наличием утечек, с конечным (постоянным) значением коэффициента усиления, с ошибками в установке параметров входных сопротивлений и т. п., проанализированы достаточно подробно в работе [13]. Погрешность операции, обусловленную этими причинами, можно назвать статической в том смысле, что существует еще динамическая составляющая погрешности, возникающая за счет неидеальности частотных характеристик решающего усилителя и за счет влияния паразитных реактивностей схемы. Таким образом, как погрешность установившегося режима, так и погрешность переходного режима содержат в себе статическую и динамическую составляющие.

В дальнейшем рассматривается только динамическая составляющая погрешности (динамическая погрешность), т. е. считается, что выходное напряжение идеального блока

$$u_{\text{вых.ид}}(p) = \sum_{i=1}^{n} H_{i\,\text{ид}}(p)\, u_{\text{вх}_i}(p). \tag{8}$$

Для упрощения расчетов динамическая задача сводится к статической с помощью операционного исчисления. При этом переход-

кую погрешность $\Delta U_{\text{вых}}\ (t)$ находят по ее изображению $\Delta U_{\text{вых}}\ (p)$:

$$\Delta U_{\text{вых}}(t) \doteqdot \Delta U_{\text{вых}}(p) = U_{\text{вых. ид}}(p) - U_{\text{вых}}(p). \qquad (9)$$

Погрешность установившегося режима получается из соотношения (9) в соответствии с теоремой операционного исчисления

$$\Delta u_{\text{вых}}(\infty) \doteqdot \Delta U_{\text{вых}}(0).$$

Динамическую погрешность в установившемся режиме удобнее, однако, трактовать в терминах «погрешность по модулю» и «погрешность по фазе», если входной сигнал операционного блока является синусоидальной функцией времени. Выражение для погрешности для такого случая может быть получено из формулы (9) заменой аргумента $p$ на $j\omega$:

$$\Delta U_{\text{вых}}(j\omega) = U_{\text{вых.ид}}(i\omega) - U_{\text{вых}}(j\omega). \qquad (10)$$

Для периодического входного сигнала произвольной формы оценка погрешности по модулю и фазе становится неудобной, и потому иногда применяют критерий среднеквадратичного отклонения двух функций на интервале $(0, \tau)$, где $\tau$ — период изменения входного напряжения [5]:

$$\sigma^2 = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} [u_{\text{вых.ид}}(t) - u_{\text{вых}}(t)]^2\, dt.$$

Рассмотрим теперь связь между динамической погрешностью операции и частотными свойствами операционного блока. Подставляя равенства (1) и (10) в соотношение (8), получим следующее выражение для динамической переходной погрешности:

$$\Delta u_{\text{вых}}(t) \doteqdot [1 - S(p)]\, U_{\text{вых.ид}}(p),$$

либо, с учетом равенства (4):

$$\Delta u_{\text{вых}}(t) \doteqdot \frac{1}{1 + T(t)} U_{\text{вых.ид}}(p). \qquad (12)$$

Динамическая переходная погрешность операции, как это следует из выражения (12), полностью определяется расположением корней знаменателя на плоскости $p$; с другой стороны, от расположения тех же корней зависит устойчивость операционного блока.

Динамическая переходная погрешность может быть рассчитана по формуле (12) после того, как выбрано расположение корней знаменателя, обеспечивающее устойчивую работу блока. Существующая при этом неоднозначность выбора может быть преодолена путем наложения дополнительного ограничения на величину перерегулирования [1]. В качестве испытательного сигнала обычно выбирают ступенчатую единичную функцию: $u_{\text{вх}}(t) = 1\ (t)$. Требования к частотным характеристикам решающего усилителя можно получить, если связать качество переходного процесса с величиной наклона частотной зависимости модуля «петлевого» усиления $T$ в области частоты среза $\omega_{\text{ср}}$ [1].

Величина перерегулирования, время регулирования и допустимое отклонение, определяющие качество переходного процесса, являются одновременно критериями оценки динамической переходной погрешности [14].

Выражение для динамической установившейся погрешности в случае синусоидального входного напряжения получим из соотношения (12):

$$\Delta U_{\text{вых}}(j\omega) = \frac{1}{1 + T(j\omega)} U_{\text{вых.ид}}(j\omega).$$

Более удобным, однако, является непосредственное использование формулы для выходного напряжения реального блока:

$$U_{\text{вых}}(j\omega) = S(j\omega)\, U_{\text{вых.ид}}(j\omega).$$

Из этого выражения следует, что погрешность операции по модулю имеет вид

$$\Delta U_{\text{вых}}(\omega) = [1 - S(\omega)]\, U_{\text{вых.ид}}(\omega), \tag{13}$$

а погрешность операции по фазе —

$$\Delta\varphi_{\text{вых}}(\omega) = |\varphi_{\text{вых.ид}}(\omega) - \varphi_{\text{вых}}(\omega)| = \varphi_s(\omega), \tag{14}$$

т. е. модуль и фазовый угол поправочной функции $S$ полностью характеризуют погрешности операции по модулю и по фазе для монохроматического сигнала.

Искажения операции будут отсутствовать, если

$$\begin{aligned} S(\omega) &= 1; \\ \varphi_s(\omega) &= 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Следует подчеркнуть, что условия (15) отличаются от условий неискаженной передачи сигнала через четырехполюсник, когда требуется, чтобы коэффициент передачи не зависел от частоты, а фазовый сдвиг в четырехполюснике зависел линейно от частоты. Дело в том, что в АВМ линейные операционные блоки не должны вносить запаздывание сигнала.

Поправочная функция $S$ однозначно связана с «петлевым» усилением

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \frac{T(\omega)}{\sqrt{1 + 2T(\omega)\cos\varphi_T(\omega) + T^2(\omega)}}; \\ \varphi_s(\omega) &= \operatorname{Arctg} \frac{\sin\varphi_T(\omega)}{T(\omega) + \cos\varphi_T(\omega)}, \end{aligned} \tag{16}$$

где $T(\omega)$ и $\varphi_T(\omega)$ — модуль и фазовый угол «петлевого» усиления.

Следовательно, и в этом случае можно установить связь между погрешностью операции и частотными характеристиками решающего усилителя, причем, как и при расчете переходной погрешности, вначале должен выбираться наклон частотной зависимости модуля петлевого усиления в области частоты среза $\omega_{\text{ср}}$, а затем

дб
$20\lg T(\omega)$
$T(\omega)$
Модуль петлевого усиления

Фазовый угол $\varphi_T$

7-2622

Рис. 3

зависимость $T(\omega)$ в оставшемся диапазоне частот, исходя из допустимых значений погрешности операции по модулю и по фазе. Наконец, в случае периодического входного сигнала произвольной формы можно воспользоваться для оценки величины погрешности операции формулой (11). Представим входное напряжение рядом Фурье

$$u_{\text{вх}_i}(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{m_i} e^{jm\omega t}, \tag{17}$$

где

$$c_{m_i} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} u_{\text{вх}_i}(t)\, e^{-jm\omega t} dt; \quad \tau = \frac{2\pi}{\omega};$$

$\omega$ — частота основной (первой) гармоники входного напряжения. Рассматривая $H_{i\text{ид}}$ и $S$ как функции комплексной частоты $jm\omega$, можем представить выходное напряжение также в виде ряда Фурье

$$u_{\text{вых}}(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} d_m e^{jm\omega t}, \tag{18}$$

где

$$d_m = S(m\omega)\, e^{j\varphi_s(m\omega)} \sum_{i=1}^{n} c_{m_i} H_{i\,\text{ид}}(m\omega)\, e^{j\varphi_{i\,\text{ид}}(m\omega)}.$$

Идеальное выходное напряжение может быть получено за счет идеализации поправочной функции $S$. Напряжение $u_{\text{вых. ид}}(t)$ может быть представлено тем же рядом (18), в котором коэффициенты $d_m$ и функция $S(m\omega)$ имеют дополнительные индексы.

Учитывая это и подставляя соотношение (18) в формулу (11), можно получить следующее выражение для квадрата среднеквадратичной ошибки:

$$\sigma^2 = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (d_m^{\text{ид}} d_{-m}^{\text{ид}} + d_m d_{-m} - 2 d_m^{\text{ид}} d_{-m}).$$

Для упрощения выкладок предположим, что линейный операционный блок имеет один вход. Тогда

$$\sigma^2 = \sum_{m=0}^{\infty} (a_m^2 + b_m^2)\,[H_{\text{ид}}(m\omega)]^2 \{S_{\text{ид}}^2(m\omega) + S^2(m\omega) - 2S_{\text{ид}}(m\omega) \times$$

$$\times S(m\omega) \cos[\varphi_{s\,\text{ид}}(m\omega) - \varphi_s(m\omega)]\}, \tag{19}$$

где $a_m$ и $b_m$ — синусные и косинусные коэффициенты в разложении входного напряжения в ряд Фурье:

$$\frac{a_m^2 + b_m^2}{2} = c_m c_{-m}.$$

Если $S(m\omega) = S_{ид}(m\omega)$ и $\varphi_s(m\omega) = \varphi_{s\,ид}(m\omega)$, то погрешность операции будет отсутствовать.

Иногда вместо абсолютного отклонения $\Delta u_{вых}(t)$ используют относительное мгновенное отклонение [5]

$$\delta u_{вых}(t) = \frac{\Delta u_{вых}(t)}{u_{вых.ид}(t)}.$$

Очевидно, что можно повторить все приведенные рассуждения и получить соответствующие выражения для $\delta u_{вых}(t)$. В частности, А. В. Гурнов [5] получил формулу для относительной среднеквадратичной погрешности на интервале $(0, \tau)$, аналогичную соотношению (19), в которой не учитывается влияние отклонения фазовой характеристики операционного блока от идеальной, т. е. считается, что $\varphi_s(m\omega) = \varphi_{s\,ид}(m\omega)$. Это справедливо в ограниченном диапазоне частот. Вероятно, именно поэтому в работе [5] получен сильно заниженный результат для максимального быстродействия линейного операционного блока.

## Замечания об оптимальной форме частотных характеристик решающего усилителя

Из предыдущего следует, что частотные зависимости модуля и фазового угла функции $T(j\omega)$ должны иметь такой вид, при котором обеспечивалась бы устойчивая работа операционного блока и получалась динамическая составляющая погрешности, не превышающая заданной величины.

Это задача из области теории следящих систем [14], и методы ее решения хорошо известны. В частности Д. Е. Полонников определял вид частотной зависимости $T(\omega)$, исходя из требований к динамической переходной погрешности, которые формулируются в виде требований к допустимой величине перерегулирования, времени регулирования и к отклонению [1].

Рассмотрим подход к решению той же задачи, исходя из требований к динамической установившейся погрешности при операции над синусоидальным входным напряжением.

Воспользуемся диаграммой Никольса, хотя в равной мере применимы и другие известные методы расчета характеристик разомкнутой системы по характеристикам замкнутой системы [14].

Возможность использования диаграммы Никольса вытекает из вида формулы для $S(j\omega)$: функцию $T(j\omega)$ можно рассматривать как коэффициент передачи некоторой «разомкнутой» системы, а функцию $S(j\omega)$ — как коэффициент передачи некоторой «замкнутой» системы; при этом операционный блок рассматривается как система автоматического регулирования с двухсторонними звеньями.

Известно, что по оси абсцисс на диаграмме Никольса откладывается фазовый угол $\varphi_T$ функции $T(j\omega)$, а по оси ординат — модуль

$T(\omega)$ в логарифмическом масштабе [15]. Фазовый угол $\varphi_T$ не должен включать изменение фазы сигнала, создаваемое усиливающими каскадами в усилителе и кратное $\pi$. В осях $\varphi_T$, $T(\omega)$ на диаграмме строится два семейства линий (рис. 3):

линии постоянного модуля функции $S(j\omega)$

$$\cos\varphi_T = \frac{T^2(\omega)\left(\frac{1}{M^2}-1\right)-1}{2T(\omega)}, \text{ где } M = S(\omega) = \text{const};$$

линии постоянного фазового угла функции $S(j\omega)$

$$T(\omega) = \frac{\sin\varphi_T}{K} - \cos\varphi_T, \text{ где } K = \operatorname{tg}\varphi_s = \text{const}.$$

Диаграмма, показанная на рис. 3, (вклейка между стр. 96—97) охватывает более широкую область значений модуля и фазового угла функции $T(j\omega)$, чем диаграмма Никольса. Ограничимся рассмотрением абсолютно устойчивых систем. Известно, что предельный годограф «петлевого» усиления $T(j\omega)$ для абсолютно устойчивых систем характеризуется наклоном — 40 *дб* /декаду частотной зависимости модуля $T(\omega)$ в районе частоты среза; фазовый угол $\varphi_T$ в этой области частот постоянен и равен $-180°$. На диаграмме рис. 3 годограф представляет собой вертикальную линию с уравнением $\varphi_T = -180°$, которая проходит через точку $\varphi_T = -180°$; $T(\omega) = 1$. Предельная зависимость $T(\omega)$ позволяет найти предельную АЧХ решающего усилителя, если параметры цепи обратной связи известны [5].

Такой предельный годограф характерен для астатических систем [14], у которых коэффициент передачи в разомкнутом состоянии бесконечно велик. Такие операционные блоки можно построить [7]. Однако большинство операционных блоков строится по типу статических систем, т. е. с очень большим, но конечным коэффициентом усиления в «разомкнутом» состоянии. Предельным годографом функции $T(j\omega)$ для таких систем является годограф Боде [10]. Выражение для функции $T(j\omega)$ имеет, согласно [10], вид

$$T(j\omega) = \frac{T(0)}{\left[\sqrt{1-\left(\frac{\omega}{\omega_b}\right)^2} + j\frac{\omega}{\omega_b}\right]^{2(1-y)}}, \tag{20}$$

где $y$ — величина запаса устойчивости по фазе в долях $\pi$. Из равенства (20) можно получить следующие выражения для модуля и фазового угла функции:

$$T(\omega) = \begin{cases} T(0) & (0 < \omega \leqslant \omega_b); \\ \dfrac{T(0)}{\left[\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_b}\right)^2 - 1} + \frac{\omega}{\omega_b}\right]^{\frac{\gamma}{20}}} & (\omega \geqslant \omega_b); \end{cases} \tag{21}$$

$$\varphi_T = \begin{cases} -\frac{\gamma}{20}\arcsin\frac{\omega}{\omega_b} & (0 < \omega \leqslant \omega_b); \\ -\frac{\gamma\pi}{40} & (\omega \geqslant \omega_b). \end{cases} \quad (22)$$

Здесь $\gamma = 40\ (1 - y)$.

Предельный годограф Боде получим при $y = 0$. Как следует из формул, предельный годограф Боде на диаграмме рис. 3 до частоты $\omega = \omega_b$ будет представлять собой горизонтальную линию с уравнением $T(\omega) = T(0)$, а для $\omega > \omega_b$ — вертикальную линию с уравнением $\varphi_T = -\pi$. Любой другой годограф системы минимально фазового типа вписывается в предельный годограф Боде, если эта система имеет такое же «петлевое» усиление $T(0)$ на нулевой частоте и такой же асимптотический наклон $\gamma$ зависимости $T(\omega)$.

Для обеспечения устойчивой работы вводится запас устойчивости по фазе в долях $\pi(y\pi$ радиан). Соответственно уменьшается наклон частотной зависимости $T(\omega)$, а предельные годографы сдвигаются на диаграмме вправо от линий $\varphi_T = -\pi$ на расстояние $y\pi$. При выборе величины запаса по фазе для линейных операционных блоков нужно исходить из допустимой величины динамической погрешности. Например, как уже указывалось, Д. Е. Полонников исходил из допустимой величины динамической переходной погрешности [1]. Для величины перерегулирования 30% в работе [1] получено, что наклон характеристики $T(\omega)$ должен быть равен $\gamma = -30$ *дб*/декаду, что соответствует запасу по фазе 45° ($y = -{}^1/_4$). При этом годограф $T(j\omega)$ не должен заходить внутрь области, ограниченной линией постоянного модуля $S(\omega) = 1{,}4$. Но на границе этой линии погрешность по модулю составляет 40%, а погрешность по фазе меняется в пределах от 0 до 180° в зависимости от величины угла $\varphi_T$. Следовательно, если исходить из величины допустимой установившейся динамической погрешности, то весь диапазон частот операционного блока можно четко разбить на две области:

1. Область частот, в пределах которой динамическая погрешность операции не должна превышать заданной величины, в пределах этой области на годограф функции $T(j\omega)$ накладывается единственное условие — годограф $T(j\omega)$ не должен выходить за пределы области диаграммы рис. 3, ограниченной предельным годографом для абсолютно устойчивой системы.

2. Область частот, в которой динамическая погрешность операции больше допустимой величины; в пределах этой области на годограф функции $T(j\omega)$ накладывается дополнительное условие, связанное либо с величиной запаса устойчивости по фазе, либо с величиной допустимого подъема в характеристике «замкнутой» системы, либо с допустимой величиной перерегулирования. Поскольку в обоих случаях имеют место некоторые предельные характеристики

$T(\omega)$ и $\varphi_T(\omega)$, то вряд ли целесообразно использовать термин «оптимальная характеристика», как это делается в работах [1.5].

Что же касается самого расчета АЧХ и ФЧХ решающего усилителя, то он должен начинаться с расчета на устойчивость, т. е. с определения зависимостей $T(\omega)$ и $\varphi_T(\omega)$ в области частоты среза. Можно, например, принять условия, чтобы в области значений модуля (см. рис. 3)

$$0{,}5 \leqslant T(\omega) \leqslant 10$$

фазовый угол $\varphi_T$ был постоянным и равным $-\frac{\gamma\pi}{40}$, где $\gamma$ — наклон частотной зависимости $T(\omega)$ [1]; а в области, где $T(\omega) > 10$, фазовый угол $\varphi_T \geqslant -\pi$.

Приведенные рассуждения показывают, что при синтезе частотных зависимостей модуля и фазового угла «петлевого усиления», а затем и АЧХ (ФЧХ) решающего усилителя целесообразно исходить из предельной фазовой характеристики $\varphi_T(\omega)$, а не из предельной характеристики $T(\omega)$. При этом расчет стабилизирующих цепочек в решающем усилителе можно вести по методике В. Г. Белякова [2], но не на заданный запас по фазе, как это делается в работе [2], а на заданную предельную фазовую характеристику.

## Выводы

1. При расчете линейных операционных блоков необходимо учитывать двухсторонний характер передачи сигналов как через сопротивление $Z_{о.с}$ обратной связи, так и через решающий усилитель.

2. При синтезе частотных характеристик решающего усилителя целесообразно исходить из предельной фазовой характеристики «петлевого» усиления, а не из предельной амплитудной характеристики. Расчет может быть выполнен по методике В. Г. Белякова [2].

3. Предельная фазовая характеристика «петлевого» усиления в области частоты среза и границы этой области могут быть получены, исходя из допустимой величины перерегулирования [1]. За пределами этой области предельная фазовая характеристика соответствует либо предельному годографу для астатических систем, либо предельному годографу Боде, если рассмотрение ограничено абсолютно устойчивыми системами.

4. Для оценки величины установившейся динамической погрешности операции (для синусоидального входного сигнала) и для определения верхней границы области рабочих частот удобно пользоваться диаграммой Никольса.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Полонников Д. Е. — В кн.: Вычислительная техника в управлении. «Наука», М., 1964.

2. Беляков В. Г. — В кн.: Аналоговая и аналого-цифровая вычислительная техника. «Машиностроение», М., 1965.

3. McDonald D.,— Review of Scientific Instruments, 1950, 21, 2.

4. Орданович А. Е.— Научные доклады высшей школы. Физико-математические науки, 1959, 1.

5. Гурнов А. В. — В кн.: Труды семинара «Методы математического моделирования и теории электрических цепей». Вып. 6. «Наукова думка», К., 1965.

6. Ленов Н. Н.— В кн.: Цифровая техника и вычислительные устройства. Изд-во АН СССР, М., 1959.

7. Тютин А. А. Автореферат кандидатской диссертации, Киевский политехнический институт, 1964.

8. Полонников Д. Е. Автореферат докторской диссертации, МЭИ, 1965.

9. Тютин А. А. — В кн.: Теоретическая электротехника. Львовский государственный университет, 1966 (в печати).

10. Боде Г. Теория цепей и проектирование усилителей с обратной связью. ИЛ, М., 1948.

11. Пампуро В. И. — Известия вузов. Радиотехника, 1962, 2.

12. Hoskins R. F.— The Proceedings of I. E. E., Electronic Record, December 1965.

13. Коган Б. Я. Электронные моделирующие устройства и их применение для исследования систем автоматического регулирования. Физматгиз, М., 1959.

14. Фельдбаум А. А. Электрические системы автоматического регулирования. Оборонгиз. М., 1957.

15. Джеймс Х., Никольс Н., Филлипс Ф. Теория следящих систем. ИЛ, М., 1953.

Доложено на семинаре
3 июня 1966 г.

# АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ЗАМКНУТЫХ СИСТЕМ С УЧЕТОМ ДВУНАПРАВЛЕННОСТИ ПЕРЕДАЧИ БЛОКОВ-ПОДСХЕМ

В. И. ПАМПУРО

Анализ устойчивости замкнутых систем непрерывного действия обычно производится в предположении, что ее блоки представляют однонаправленные (детектирующие) подсхемы, характеризуемые коэффициентами передачи со входа на выход. В основе такого подхода лежит предпосылка о том, что реакцию следующей подсхемы $j$ на предыдущую $i = j - 1$ можно учесть через входную проводимость

$$Y_{вх} = Y_{11} + Y_{12}\dot{K},$$

где $\dot{K}$ — комплексный коэффициент передачи входной величины на выход подсхемы $j$; $Y_{11}$ — собственная проводимость; $Y_{12}$ — взаимная проводимость подсхемы $j$.

Так как при строгом анализе коэффициента передачи $\dot{K}$ необходимо учитывать реакцию системы на подсхему $j$, то для замкнутых систем имеем замкнутую цепь рассматриваемых реакций, которую подобным подходом количественно оценить нельзя.

Данная задача решается сравнительно просто, если предположить, что подсхема двунаправленная, т. е. она характеризуется коэффициентами передачи со входа на выход и с выхода на вход.

Такой подход предложен в работах [1—3], где уравнение подсхемы с $m$ узлами записывается в виде

$$\begin{array}{c} \\ \left\| \begin{array}{c} Q'_1 \\ Q'_2 \\ \cdots \\ Q'_m \end{array} \right\| \end{array} = \begin{array}{c} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \cdots \\ m \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \cdots & m \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cccc} 1 & \rho_{12,i} & \cdots & \rho_{1m,i} \\ \rho_{21,i} & 1 & \cdots & \rho_{2m,i} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{m1,i} & \rho_{m2,i} & \cdots & 1 \end{array} \right\| \end{array} \cdot \begin{array}{c} \\ \left\| \begin{array}{c} Q_1 \\ Q_2 \\ \cdots \\ Q_m \end{array} \right\| \end{array}$$

Здесь $Q_j'$ — суммирующиеся векторы; $Q_j$ — общие векторы ($j = 1, 2, \ldots, m$). Вторичные $\rho_{sp,\,i}$-параметры определяются так:

$$\rho_{sp,\,i} = \frac{Q_s}{Q_p}\begin{pmatrix} Q_q = 0; \quad q \neq p; \quad q \neq s \\ q = 1,\ 2,\ \ldots,\ m \end{pmatrix}.$$

В случае продольных величин $Q$ вторичные $\rho$-параметры определяются экспериментально для разомкнутых $q$-контуров, а в случае поперечных величин — при замыкании всех $q$-узлов на базис; аналитически они определены в работах [1—4].

Общее уравнение схемы получим сложением уравнений подсхем. Некоторые примеры использования указанного подхода для анализа радиотехнических схем и систем автоматического управления даны в работе [4].

Остановимся на выяснении ошибки при анализе устойчивости в предположении однонаправленных подсхем. Для этого рассмотрим расчет фазо-частотной характеристики трехкаскадного лампового усилителя, каждый каскад которого собран по схеме с общим катодом и представляет апериодическое звено. Каскады идентичные.

Как известно, дополнительный фазовый сдвиг $\varphi_т$ комплексного коэффициента передачи $\dot{K}_т = K_т e^{-j\varphi_т}$ достигает 180° при уменьшении модуля коэффициента передачи $K_т$ в девять раз против его максимального значения [5—7]. Такой вывод получается в предположении однонаправленности подсхем каскадов.

## Основные расчетные соотношения

Если положить, что подсхемы каскадов двунаправленны, то коэффициент передачи трехкаскадного усилителя согласно работам [1—3] имеет вид

$$\dot{K}_т = \frac{\rho_{21,1}\rho_{21,2}\rho_{21,3}}{1 + \rho_{12,2}\rho_{21,2} - \rho_{12,3}\rho_{21,3}},$$

где $\rho_{21,\,j}$ — параметр, определяющий передачу сигнала со входа на выход $j$-подсхемы; $\rho_{12,\,j}$ — параметр, определяющий передачу с выхода на вход $j$-подсхемы ($j = 1,\ 2,\ 3$).

Параметры $\rho$ могут быть выражены через соответствующие $Y$-параметры подсхем-четырехполюсника [1—4]:

$$\rho_{21,j} = \frac{Y_{21,j}}{Y_{22,j} + Y_{11,j+1}},$$

$$\rho_{12,j} = \frac{Y_{12,j}}{Y_{11,j} + Y_{22,j-1}}, \qquad (j = 1,\ 2,\ 3),$$

где проводимость $Y_{11,3+1}$ определяет проводимость нагрузки усилителя $Y_н$, носящей емкостный характер, а проводимость $Y_{22,1-1}$ — проводимость генератора, включенного на вход усилителя.

В случае идентичных каскадов

$$\rho_{21,1} = \rho_{21,2} = \rho_{21,3} = k_1, \tag{2}$$

$$\rho_{12,1} = \rho_{12,2} = \rho_{12,3} = \beta. \tag{3}$$

Проводимости $Y$ обычно носят активный, емкостный и активноемкостный характер:

$$Y_{21,1} = Y_{21,2} = Y_{21,3} = G_{21}, \quad Y_{12,2} = Y_{12,3} = -j\omega\alpha,$$

$$Y_{22,1} = Y_{22,2} = Y_{22,3} = a_2 + j\omega b_2,$$

где $\omega$ — круговая частота.

Поэтому знаменатели параметров $k$ и $\beta$ можно представить в виде

$$(a_1 + a_2) + j\omega(b_1 + b_2) = a + j\omega b.$$

Тогда

$$k = \frac{G_{21}}{a + j\omega b} = |k| e^{-j\varphi_k}, \qquad \beta = \frac{j\omega\alpha}{a + j\omega b} = |\beta| e^{-j\varphi_\beta}; \tag{4}$$

$$|k| = \frac{G_{21}}{\sqrt{a^2 + \omega^2 b^2}}, \quad \varphi_k = \operatorname{arctg}\frac{\omega b}{a}$$

$$|\beta| = \frac{\omega\alpha}{\sqrt{a^2 + \omega^2 b^2}}, \quad \varphi_\beta = \frac{\pi}{2} + \varphi_k. \tag{5}$$

Учитывая выражения (2) — (5), получим

$$\dot{K}_т - \frac{|k|^3 e^{-j3\varphi_k}}{1 - 2|\beta k| e^{-j\left(\frac{\pi}{2} + 2\varphi_k\right)}} = K_т e^{-j\varphi_т}, \tag{6}$$

где

$$\dot{K}_т = \frac{|k|^3}{\sqrt{(1 + 2|\beta k| \sin^2 \varphi_k)^2 (2|\beta k| \cos 2\varphi_k)^2}}, \tag{7}$$

$$\varphi_т = \pi + 3\varphi_k + \operatorname{arctg}\frac{2|\beta k| \cos 2\varphi_k}{1 + 2|\beta k| \sin 2\varphi_k}. \tag{8}$$

Полученные выражения принципиально отличаются от выражений коэффициента передачи трехкаскадного усилителя, которое находится в предположении однонаправленности передачи его каскадов [5—7]. Действительно, в предположении однонаправленности передачи каскадов, представляющих апериодические звенья, коэффициент передачи трехкаскадного усилителя определяется произведением трех коэффициентов передачи вида $k$ (4), т. е. в таком случае коэффициент передачи совпадает по форме с числителем

коэффициента $\dot{K}_{т}$ (6). Допускаемая ошибка по фазе оценивается фазой выражения знаменателя коэффициента $\dot{K}$ (6). Как увидим на конкретных примерах, ошибка может быть очень значительной.

## Вспомогательные таблицы

Полученные расчетные формулы, несмотря на ряд допущений, приводят к громоздким вычислениям. Вычисления можно упростить, если воспользоваться вспомогательными таблицами. Так, например, расчет коэффициента усиления трехкаскадного усилителя может быть упрощен, если иметь табличные и графические задания следующих нормированных функций:

$$\varphi_k = F\left(\frac{f}{f_0}\right); \quad 3\varphi_k = F_2\left(\frac{f}{f_0}\right); \quad \frac{|k|}{k_0} = F_3\left(\frac{f}{f_0}\right)$$

$$\frac{|\beta k|}{\beta_0 k_0} \sin 2\varphi_k = F_4\left(\frac{f}{f_0}\right) \quad \text{и} \quad \frac{|\beta|}{\beta_0} = F_5\left(\frac{f}{f_0}\right),$$

где коэффициенты $\beta_0$ и $k_0$ определены для частоты

$$f_0 = \frac{a}{2\pi b}.$$

На частоте $f_0$ справедливо равенство

$$a = b\omega_0,$$

и фазовый угол $\varphi_k$ достигает 45°, а модуль параметров $k$ и $\beta$ соответственно имеют вид

$$k_0 = |k|_{\omega=\omega_0} = \frac{G_{21}}{\sqrt{a^2 + b^2\omega_0^2}} = \frac{G_{21}}{a\sqrt{2}};$$

$$\beta_0 = |\beta|_{\omega=\omega_0} = \frac{\omega_0 \alpha}{\sqrt{a^2 + b^2\omega^2}} = \frac{\alpha}{b\sqrt{2}} = \frac{\omega_0 \alpha}{a\sqrt{2}}.$$

Необходимые вспомогательные функции запишутся так:

$$\varphi_k = \operatorname{arctg}\frac{b\omega}{a} = \operatorname{arctg}\frac{\omega}{\omega_0}\cdot\frac{\omega_0 b}{a} = \operatorname{arctg}\frac{f}{f_0};$$

$$\frac{|\beta|}{\beta_0} = \frac{\omega\alpha\sqrt{a^2 + b^2\omega_0^2}}{\omega_0\alpha\sqrt{a^2 + b\omega^2}} = \frac{\omega}{\omega_0}\cdot\frac{b\omega_0\sqrt{2}}{\sqrt{a^2 + b^2\omega^2}} = \frac{f}{f_0}\frac{f\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^2}};$$

$$\frac{|k|}{k_0} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2\omega_0^2}}{\sqrt{a^2 + b^2\omega^2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^2}};$$

$$\frac{|\beta k|}{\beta k_0} \sin 2\varphi_k = \frac{f}{f_0}\frac{2}{\left[1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^2\right]} \sin 2\left(\operatorname{arctg}\frac{f}{f_0}\right).$$

Используя приведенные формулы, построим графики (рис. 1) нормированных функций. Нормированные функции значительно сокращают объем вычислений, что будет показано на примерах.

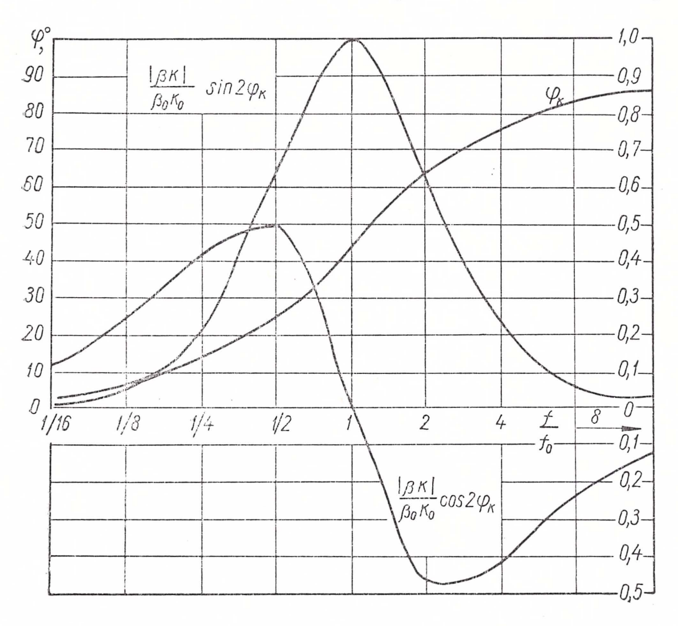



Рис. 1.

## Примеры

В качестве примеров рассмотрим расчет двух трехкаскадных усилителей.

П р и м е р 1. Для определения максимально допустимой глубины обратной связи рассчитаем в области высоких частот коэффициент усиления трехкаскадного усилителя, каждый каскад которого собран на сдвоенном триоде 6Н1П по схеме с общим катодом. Параметры элементов следующие:

$$G_{21} = S = 6{,}4 \cdot 10^{-3} \ \textit{сим} \ \left(6{,}4 \frac{\textit{ма}}{\textit{в}}\right); \quad Y_i = G_i = 18 \cdot 10^{-5} \ \textit{сим};$$

$$C_з = 4 \cdot 10^{-12} \ \textit{ф} \ (Y_з = j\omega C_з); \ Y_н = G_н + j\omega C_н; \ G_{зн} = 5 \cdot 10^{-5} \ \textit{сим};$$

$$C_н = 10^{-11} \ \textit{ф}; \quad Y_2 = j\omega C_2; \quad C_2 = 10^{-11} \ \textit{ф}.$$

В величины емкостей $C_2$ и $C_н$ входят как межэлектродные, так и монтажные емкости. Сделаем расчет:

$$f_0 = \frac{a}{2\pi b} = \frac{G_н + G_i}{(G_н + C_з)\, 2\pi} = \frac{5 \cdot 10^{-5} + 18 \cdot 10^{-5}}{(1 \cdot 10^{-11} + 4 \cdot 10^{-12})\, 2\pi} = 2{,}5 \ \textit{Мгц};$$

$$k = \frac{G_{21}}{a\sqrt{2}} = \frac{S}{(G_н + G_i)} = \frac{6{,}4 \cdot 10^{-3}}{(5 \cdot 10^{-5} + 18 \cdot 10^{-5})\ 1{,}41} = 20;$$

$$\beta_0 = \frac{\omega_0 \alpha}{a\sqrt{2}} = \frac{\omega_0 \omega_0 C_3}{(G_н + G_i)\sqrt{2}} = \frac{(2\pi \cdot 2{,}5 \cdot 10^6)^2\ 4 \cdot 10^{-12}}{(5 \cdot 10^{-5} + 18 \cdot 10^{-5})} \approx 0{,}2.$$

Используя данные рис. 1, результаты вычислений сводим в табл. 1. Все параметры обозначим дополнительно штрихом, чтобы отличить от расчетных параметров второго примера. В таблице принято также обозначение

$$\varphi_\Sigma = 3\varphi_k + \operatorname{arctg} \frac{2\,|\beta k|\cos 2\varphi_k}{1 + 2\,|\beta k|\sin 2\varphi_k} = 3\varphi_k + \varphi_{зн}.$$

Таблица 1

| $f/f_0$ | $(k')^3$ | $2\beta k' \sin 2\varphi_k$ | $2\beta k' \cos 2\varphi_k$ | $\frac{2\beta k' \cos 2\varphi_k}{1+2\beta k' \sin 2\varphi_k}$ | $\varphi'_{зн}$, ° | $\varphi'_\Sigma$, ° | Модуль знаменателя | $K'_T$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1/16 | 22 000 | 0,12 | 1,0 | 0,895 | 429 | 52 | 1,5 | 14 150 |
| 1/8 | 21 300 | 0,48 | 1,9 | 1,28 | 52 | 73 | 2,4 | 8900 |
| 1/4 | 20 500 | 1,68 | 3,28 | 1,22 | 51 | 93 | 4,2 | 4760 |
| 1/2 | 15 500 | 5,12 | 3,84 | 0,63 | 32 | 111 | 7,2 | 2300 |
| 1 | 7650 | 8 | 0 | 0 | 0 | 135 | 9 | 950 |
| 2 | 1950 | 5,12 | —3,84 | —0,63 | —32 | 158 | 7,2 | 270 |
| 4 | 210 | 1,68 | —3,28 | —1,22 | —51 | 176 | 4,2 | 74 |
| 8 | 40 | 0,48 | —1,9 | —1,28 | —52 | 196 | 2,4 | 16,5 |
| 16 | 5,4 | 0,12 | —1,0 | 0,895 | —42 | 217 | 1,5 | 3,6 |

Таблица 2

| $f/f_0$ | $(k'')^3$ | $2\beta k'' \sin 2\varphi_k$ | $2\beta k'' \cos 2\varphi_k$ | $\frac{2\beta k'' \cos 2\varphi_k}{1+2\beta k'' \sin 2\varphi_k}$ | $\varphi''_{зн}$, ° | $\varphi''_\Sigma$, ° | Модуль знаменателя | $K''_T$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1/16 | 11 600 | 0,048 | 0,4 | 0,38 | 21 | 32 | 1,12 | 10 200 |
| 1/8 | 11 000 | 0,19 | 0,76 | 0,64 | 33 | 58 | 1,41 | 8600 |
| 1/4 | 10 600 | 0,67 | 1,31 | 0,78 | 38 | 80 | 2,1 | 5050 |
| 1/2 | 8400 | 2,04 | 1,54 | 0,51 | 27 | 106 | 3,4 | 2470 |
| 1 | 4100 | 3,2 | 0 | 0 | 0 | 135 | 4,2 | 1000 |
| 2 | 1020 | 2,04 | —1,54 | —0,51 | —27 | 163 | 3,4 | 300 |
| 4 | 165 | 0,67 | —1,31 | —0,75 | —38 | 189 | 2,1 | 76 |
| 8 | 22 | 0,19 | —0,76 | —0,64 | —33 | 215 | 1,41 | 14 |
| 16 | 2,8 | 0,048 | —0,4 | —0,38 | —21 | 239 | 1,12 | 2,5 |

Пример 2. Рассчитаем в области высоких частот коэффициент усиления трехкаскадного усилителя, в каждом каскаде кото-

рого используется один триод лампы 6Н1П, а схема каскада собрана по схеме с общим катодом. Параметры элементов схемы следующие:

$$S = 3{,}2 \cdot 10^{-3}\ \textit{сим};\quad G_i = 9 \cdot 10^{-5}\ \textit{сим};\quad G_{н} = 5 \cdot 10^{-5}\ \textit{сим};$$

$$G_3 = 2 \cdot 10^{-12}\ \textit{ф};\quad C_2 = C_{н} = 10^{-11}\ \textit{ф}.$$

Найдем вспомогательные величины

$$f_0 = 1{,}6\ \textit{Мгц};\quad k_0 = 16;\quad \beta_0 = 0{,}1;\quad \beta_0 k_0 = 1{,}6.$$

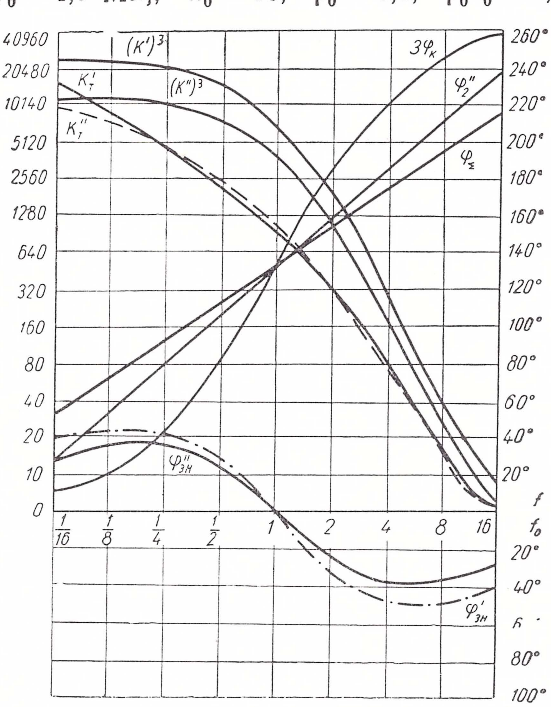



Рис. 2.

Используя графики, результаты вычислений сводим в табл. 2. Отметим буквенные величины двумя штрихами. Полученные для двух примеров зависимости

$$|k'|^3 = F_1'\left(\frac{f}{f_0}\right),\quad |k''|^3 = F_1''\left(\frac{f}{f_0}\right),\quad 3\varphi_k = F_2\left(\frac{f}{f_0}\right)$$

$$\varphi_\Sigma' = F_3'\left(\frac{f}{f_0}\right) \text{ и } \varphi_\Sigma'' = F_3''\left(\frac{f}{f_0}\right)$$

построим графически (рис. 2).

Три первые зависимости соответствуют зависимостям модуля и фазы трехкаскадного усилителя без учета комплексности обрат-

ной связи. Они обычно и приводятся в литературе [5—7]. Согласно им, уменьшению коэффициента усиления в девять раз соответствует сдвиг по фазе в 180°.

В нашем случае аналогичные результаты получаются, если не учитывать знаменателя выражения коэффициента $\dot{K}_т$.

На рис. 2 приведены фазовые характеристики знаменателя для двух примеров, из которых видно, что начиная с частоты $f = f_0$ фазовый угол знаменателя $\varphi_{зн}$ становится отрицательным и рост суммарного фазового угла $\varphi_\Sigma = 3\,\varphi_k + \varphi_{зн}$ с частотой замедляется: происходит стабилизация фазового сдвига обратной связью.

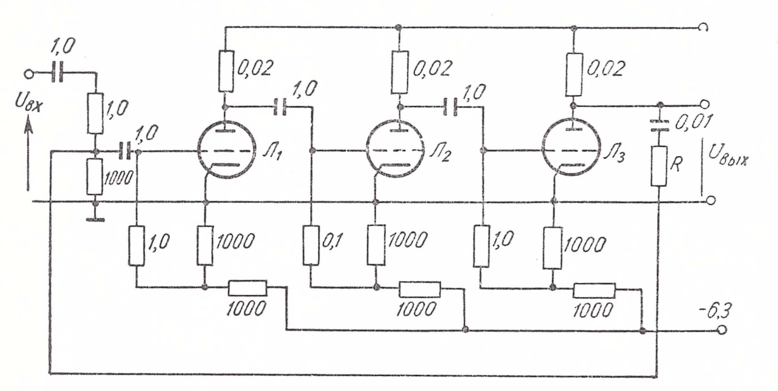



Рис. 3.

Из зависимостей суммарного фазового угла $\varphi_\Sigma$ от частоты следует, что фазовый угол достигает 180°, когда коэффициент усиления ($K_т$) с учетом комплексности межкаскадной обратной связи уменьшается в первом случае ($K'_т$) в 170 раз и во втором случае ($K''_т$) в 50 раз. Приведенные результаты имеют особое значение при охвате усилителя общей отрицательной обратной связью. Если задаться запасом по фазе в 25°, то допустимая глубина обратной связи, цепь которой представляет безынерционный делитель, в первом случае равна 90, а во втором — 40.

Практическая проверка результатов теоретического анализа была проделана на усилителе, приведенном на рис. 3. Испытывалось два варианта схемы: первый в качестве ламп $Л_1$, $Л_2$ и $Л_3$ применялся сдвоенный триод 6Н1П; второй — в качестве ламп $Л_1$, $Л_2$ и $Л_3$ применялась половина двойного триода 6Н1П. Для устранения возбуждения по низким частотам в цепь обратной связи был включен фильтр верхних частот (разделительный конденсатор выбирался по величине емкости, значительно меньшей, чем емкость разделительных межкаскадных конденсаторов). Анодное питание осуществлялось от выпрямителя с электронной стабилизацией; питание цепей накала и смещения осуществлялось от аккумулятора. Максимально допустимая глубина обратной связи, при которой

усилитель работал устойчиво, была в первом случае 95, а во втором — 33. Сравнивая экспериментальные и расчетные данные, видим, что полученные результаты имеют достаточное совпадение. Анализ частотных характеристик в конкретных примерах при условии $Y_г = \infty$ объясняется тем, что в практических схемах выходное сопротивление цепи обратной связи мало̀. В тех случаях, когда цепь обратной связи включается последовательно с входным генератором, обладающим высокоомным входным сопротивлением, допустимая глубина обратной связи изменяется из-за дополнительных фазовых искажений в цепи входа первого каскада.

Из изложенного можно сделать такие выводы:

1. В общем случае анализа замкнутых систем их блоки необходимо представлять двунаправленными подсхемами. Представление блоков однонаправленными подсхемами допустимо в области равномерной амплитудно-частотной характеристики при малых фазовых искажениях.

2. Метод анализа цепей, учитывающий реакцию подсхем в виде входной проводимости так, как это показано в начале статьи, принципиально нестрогий и может применяться только для приближенных расчетов.

3. Для замкнутых систем, состоящих из апериодических подсхем, могут быть получены общие нормированные амплитудно- и фазо-частотные зависимости (как это показно в работах [5—7]) в области низкочастотного спада амплитудно-частотной характеристики, где подсхемы можно считать однонаправленными. Такие общие зависимости не могут быть получены в области высокочастотного спада амплитудно-частотной характеристики, где подсхемы следует рассматривать двунаправленными, т. е. выводы, содержащиеся в работах [5—7] для области высокочастотного спада, неверны и расчет амплитудно-частотной характеристики следует производить в каждом конкретном случае отдельно.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Пампуро В. И.— В кн.: Математическое моделирование и электрические цепи. Вып. 3. «Наукова думка», К., 1963.

2. Пампуро В. И.— В кн.: Математическое моделирование и теория электрических цепей. Вып. 3. «Наукова думка», К., 1965.

3. Пампуро В. И. Анализ сложных схем. «Знання», К., 1965.

4. Пампуро В. И. Анализ усилительных схем и систем автоматического регулирования. «Знання», К., 1965.

5. Кризе С. Н. Усилители напряжения низкой частоты, Гостехиздат, М., 1953.

6. Ламповые усилители. Перевод с английского. Т. II. «Советское радио», М., 1951.

7. Эйлинккрит А. И., Гликман С. Е. Модуляционные устройства для передатчиков с амплитудной модуляцией. «Советское радио», М., 1954.

Рассмотрено на семинаре
24 июня 1966 г.

# РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА ЛИТЛА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА С ПОМОЩЬЮ ЭЛЕКТРОННЫХ ЦЕПЕЙ

В. В. ВАСИЛЬЕВ, Г. К. ШАРАШИДЗЕ

1. В настоящее время специалисты по исследованию операций и вычислительной технике проявляют все более возрастающий интерес к задаче коммивояжера [1—3, 7]. Это объясняется тем, что при предельно ясной и простой постановке задачи до последнего времени не было разработано достаточно эффективных методов и алгоритмов ее решения или моделирования. Между тем задача коммивояжера возникает очень часто при решении задач по организации производства [4].

В области алгоритмов решения задачи коммивояжера заметных результатов достигли Дж. Литл, К. Мурти, Д. Суини, К. Кэрел [1].

По математической постановке задача коммивояжера ближе всего подходит к задаче о кратчайшем пути и задаче о назначениях. В работе [2] описан способ сведения задачи коммивояжера к задаче о длиннейшем пути. Однако, несмотря на то, что существуют электронные модели упомянутых задач, а также задач расчета сетевого графика (частного случая задачи о длиннейшем пути), до сих пор неизвестны неалгоритмические модели задачи коммивояжера. Основным препятствием получения решения задачи коммивояжера с помощью моделей задачи о назначениях и задачи расчета сетевого графика является появление замкнутых контуров, охватывающих часть пунктов. При этом решение соотвествующей задачи коммивояжера о назначениях не может интерпретироваться как решение задачи коммивояжера, а модель задачи о длиннейшем пути оказывается в аварийном режиме из-за наличия двунаправленных ветвей и замкнутых контуров, отсутствующих в задаче расчета сетевого графика.

В работе [5] описан алгоритм использования модели задачи о назначениях для получения решения задачи коммивояжера.

Ниже сделана попытка механизации алгоритма Литла и других с помощью электронных цепей, содержащих диоды и источники напряжения. Предполагается, что элементы цепи имеют идеальные характеристики.

**2.** Следуя работам [1, 3], приведем постановку задачи коммивояжера. Имеется $n$ городов с известными расстояниями между ними $d_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, n;\ i \neq j)$. Необходимо определить замкнутый маршрут бродячего торговца, охватывающий все города (пункты), с минимальной длиной. Каждый город разрешается посещать только один раз.

В терминах математического программирования задача коммивояжера описывается соотношениями

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad j = 1, \ldots, n, \quad i \neq j; \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1, \ldots, n, \quad i \neq j; \tag{2}$$

$$x_{ij}^2 = x_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, n; \tag{3}$$

$$u_i - u_j + p x_{ij} \leqslant p - 1, \quad i, j = 1, \ldots, n, \ i \neq j, \tag{4}$$

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_{ij} \to \min. \tag{5}$$

Решение задачи линейного программирования (1) — (5) интерпретируется следующим образом. Уравнения (3) накладывают на компоненты вектора $X$ требования целочисленности ($x_{ij} = 0$ либо $x_{ij} = 1$). Если $x_{ij} = 1$, то соответствующая пара городов включается в путь (маршрут) коммивояжера. Из соотношений (1) — (5) видно, что задача коммивояжера отличается от задачи о назначениях неравенствами (4), определяющими отсутствие контуров (маршрутов), охватывающих меньше чем $n$ пунктов.

Известна также и более компактная запись условий задачи коммивояжера [6]: определить циклическую перестановочную матрицу $X = \{x_{ij}\}$, $(X^n = E)$, минимизирующую след $Sp\ (D^*X)$, где $D = \{d_{ij}\}$ — матрица расстояний коммивояжера.

**3.** Простой перебор возможных путей коммивояжера приводит к необходимости рассмотрения $(n - 1)!$ вариантов. Алгоритм Литла позволяет осуществить целенаправленный поиск оптимального пути без перебора вариантов в полном объеме. Оптимальный или весьма близкий к оптимальному маршрут получается обычно уже после проведения $n$ шагов алгоритма.

Сущность алгоритма Литла [1] состоит в следующем. Множество всех возможных путей на каждом шаге алгоритма разбивается на все меньшие и меньшие непересекающиеся подмножества, для каждого из которых определяются нижние границы длин путей коммивояжера. Разбиение производят до тех пор, пока нижние границы всех полученных подмножеств не будут больше длины одного из полученных путей. Последний в этом случае будет оптимальным.

Нижние границы подмножеств определяются на каждом шаге алгоритма путем логического анализа элементов матрицы расстояний.

Схема алгоритма Литла выглядит следующим образом.

1. Привести матрицу расстояний к виду, когда в каждом столбце и каждой строке имеется хотя бы один нулевой элемент, путем вычитания минимальных элементов из строк и столбцов; определить сумму констант приведения

$$W_0 = \sum_{i=1}^{n} h_i + \sum_{j=1}^{n} h_j, \quad i, j = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

где $W_0$ — нижняя граница всех путей коммивояжера.

2. Для каждой нулевой клетки $ij$ ($d_{ij} = 0$) преобразованной матрицы расстояний определить сумму минимальных элементов строки $i$ и столбца $j$ (кроме элемента $d_{ij}$). Из полученных чисел выбрать максимальное:

$$\Theta_{mn} = \max \left(\min_{k \neq j} d_{kj} + \min_{i \neq i} d_{il}\right)$$
$$\{i, j\} \in I = \{i, j/\bar{d}_{ij} = 0\}. \tag{7}$$

В результате второго шага определяется пара пунктов $mn$, которая используется в качестве основы для разбиения множества всех путей коммивояжера на два подмножества $\bar{X}_{mn}$ и $X_{mn}$. Характерным признаком всех путей, принадлежащих подмножеству $\bar{X}_{mn}$, является то, что ветвь $mn$ не входит ни в один путь подмножества. Любой путь подмножества $X_{mn}$, напротив, в обязательном порядке включает ветвь $mn$.

Нижняя граница длин путей подмножества $\bar{X}_{mn}$ равна

$$\bar{W}_1 = W_0 + \Theta_{mn}.$$

3. Определить нижнюю границу длин путей подмножества $X_{mn}$. Для этого вычеркнуть строку $m$ и столбец $n$. Заменить элемент $d_{nm}$ на бесконечность с целью предотвращения контура, охватывающего два города $m$ и $n$. Полученную матрицу расстояний $n - 1$ порядка привести по строкам и столбцам. Определить сумму констант приведения

$$W_{mn} = \sum_{i \neq m} h_i + \sum_{j \neq n} h_j. \tag{9}$$

Нижняя граница длин путей подмножества $X_{mn}$ определяется по формуле

$$W_1 = W_0 + W_{mn}. \tag{10}$$

Операции п. 3 представляют по сути дела п. 1 для матрицы расстояний $n - 1$ порядка.

4. Повторять п. 2 и 3 до тех пор, пока не будет получено подмножество $X_{pr}$, состоящее из единственного пути. Нижняя граница этого подмножества, очевидно, будет равна длине пути.

5. Сравнить длину полученного пути с нижними границами подмножеств $\overline{X}$, вычисленными ранее: а) если длина этого пути меньше любой нижней границы, полученный путь оптимален; б) если нижняя граница какого-либо подмножества меньше длины пути, оптимальный путь следует искать путем дальнейшего разбиения этого подмножества.

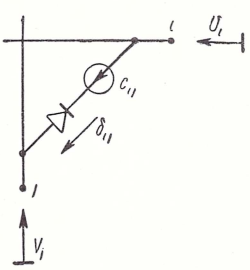


Рис. 1.

4. С целью реализации алгоритма Литла возьмем цепь матричной структуры, состоящую из идеальных диодов * и источников напряжения. В этой цепи строки $i$ связаны со столбцами $j$ ветвями, содержащими диод и источник напряжения, которые соединены последовательно (рис. 1).

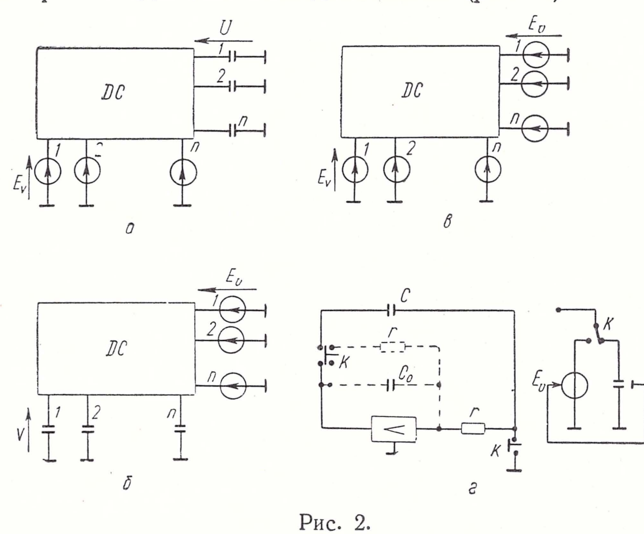



Рис. 2.

На рис. 1 приняты следующие обозначения: $U_i$ — потенциал строки; $V_j$ — потенциал столбца; $c_{ij}$ — напряжение источника, моделирующее длину ветви ($c_{ij} = d_{ij}$), $\delta_{ij} = V_j - U_i - c_{ij}$ — напряжение на диоде.

Рассмотрим следующие три режима цепи (рис. 2):

1. К столбцам цепи подключены источники напряжения $E_V^0$, к строкам — запоминающие конденсаторы (рис. 2, *а*). Нетрудно

* Предполагается, что $g_{пр} = \infty, g_{обр}$ — весьма мало.

видеть, что вектор напряжения на конденсаторах будет определяться выражением

$$U = D(E_V^0, C), \tag{11}$$

где $D$ — оператор выбора минимума по строке:

$$U_i = -\min_j (c_{ij} - E_{Vj}^0). \tag{12}$$

2. К строкам цепи подключены источники напряжения $E_U = U$, к столбцам — запоминающие конденсаторы (рис. 2, *б*). При этом имеем

$$V = D^* (E_U, C) \tag{13}$$

где $D^*$ — оператор выбора минимума по столбцу:

$$V_j = \min_j (c_{ij} + E_{Ui}). \tag{14}$$

3. К строкам и столбцам подключены источники напряжения $E_U = U$, $E_V = V$ (рис. 2, *в*), при этом

$$\delta_{ij} = E_{Vj} - E_{U_i} - c_{ij}. \tag{15}$$

Переход от режимов запоминания напряжений $U$ и $V$ к режимам задания напряжений $E_U$, $E_V$ может быть осуществлен, например, с помощью известной схемы рис. 2, *г*. В исходном положении ключей К схема эквивалентна запоминающему конденсатору. При переключении К конденсатор $C$ включается в цепь обратной связи усилителя и схема превращается в источник напряжения.

Если в дополнение к трем описанным режимам ввести возможность разрыва ветвей, а также отключения отдельных строк и столбцов, нетрудно организовать последовательность действий, аналогичных шагу алгоритма Литла.

Опишем эту последовательность действий:

1. Установить $E_V^0 = 0$ и реализовать первый, второй и третий режимы последовательно, затем с помощью сумматора определить

$$L = \sum_j E_{Vj} - \sum_i E_{Ui}; \tag{16}$$

величина $L$ будет пропорциональна сумме констант приведения или нижней границе длин всех возможных путей коммивояжера

$$L \equiv W_0. \tag{17}$$

2. В третьем режиме измерить напряжение на диодах $\delta_{ij}$ и отметить те диоды, напряжение на которых равно нулю. Эти диоды определят нулевые клетки преобразованной матрицы расстояний.

Для нахождения суммы минимальных элементов некоторой строки $i$ и столбца $j$ необходимо выполнить следующие операции:

1) разорвать ветвь $ij$ (выключить диод);

2) реализовать первый, второй и третий режимы последовательно, причем в первом режиме установить $E_V^0 = V^0$, где $V^0$ — напряжение, полученное при реализации второго в п. 1.

Напряжение $\delta_{ij}$ на месте диода будет пропорционально искомой сумме.

Проделать эти же операции для всех нулевых клеток. Из полученных напряжений выбрать максимальные и отметить клетку, ему соответствующую $(mn)$.

Значение напряжения $L$ при разрыве ветви $mn$ будет пропорционально $\overline{W}_1$.

3. Отключить строку $m$ и столбец $n$, разорвать ветвь $nm$, реализовать первый, второй и третий режимы. Значение напряжения $L$, полученное на этом шаге, будет пропорционально нижней границе. Затем измерить напряжения на диодах и так далее в соответствии с п. 2 и 3.

Таким образом, описанные операции позволяют реализовать основные этапы алгоритма Литла, без преобразования матрицы расстояний, а также на каждом шаге определить величины нижних границ, длин путей без ручных вычислений.

Нам представляется, что материалы статьи можно использовать при разработке автомата, предназначенного для оперативного и наглядного решения задачи коммивояжера, при небольшом числе пунктов.

Рассмотрим пример реализации алгоритма для задачи коммивояжера на 5 пунктов. Напряжения источников, приведенные на рис. 3, соответствуют расстояниям между пунктами в данной задаче.

На первом шаге решения в схеме последовательно реализуются первый, второй и третий режимы (рис. 2, *а*, *б* и *в*). В первом режиме $E_V^0 = 0$, т. е. вертикальные шины заземлены. Конденсаторы, подключенные к горизонтальным шинам, заряжаются до напряжений $U_i^0$ $(i = 1, \ldots, 5)$, равных минимальным напряжениям источников соответствующих строк. При этом потенциал, установившийся на горизонтальных шинах, имеет отрицательный знак:

$$U_i^0 = -\min_j c_{ij}.$$

Для заданной матрицы расстояний $U_1^0 = -16$, $U_2^0 = -1$, $U_3^0 = -5$, $U_4^0 = -16$, $U_5^0 = -12$. Эти величины приводятся на рис. 3 справа от схемы.

Конденсаторы с напряжениями $U_i^0$ $(i = 1, \ldots, 5)$ заменяются источниками $E_U^0 = U^0$. К вертикальным шинам подключаются незаряженные конденсаторы. Осуществляется второй режим. Конденсаторы заряжаются до напряжений

$$V_j^0 = \min_i (c_{ij} + E_{Ui}),$$

$$V_1^0 = 0, V_2^0 = 0, \quad V_3^0 = 9, \; V_4^0 = 0, \; V_5^0 = 0.$$

Эти данные приводятся на рис. 3 под схемой.

После подключения источников $E_U^0 = U^0$ и $E_V^0 = V^0$ к горизонтальным и вертикальным шинам соответственно, схема переходит в третий режим. Выявляются ветви, на диодах которых падение напряжения

$$\delta_{ij}^0 = E_{Vj} - E_{Ui} - c_{ij}$$

равно нулю. Это условие обязательно выполняется хотя бы для одной ветви в каждой строке и каждом столбце матрицы. Напряжения $\delta_{ij}^0 = 0$ для ветвей 14, 24, 35, 42, 43 и 51.

Рис. 3.

Рис. 4.

При помощи сумматора определяется нижняя граница длин всех путей коммивояжера

$$W_0 \equiv L = \sum_j E_{Vj} - \sum_i E_{Ui} = 59.$$

Переходим к определению величин $\Theta_{ij}^0$ для $\{ij\} \in I = \{ij \mid \delta_{ij}^0 = 0\}$. Для этого поочередно выключаем диоды из ветвей, для которых $\delta_{ij}^0 = 0$. Выключаем диод из ветви 14 и реализуем последовательно первый, второй и третий режимы, причем в первом режиме на вертикальных шинах устанавливаем напряжения $\overline{\delta E}_V^0 = V^0$. Получим новые величины $\overline{E}_U$ и $\overline{E}_V$. Напряжение $\overline{\delta}_{14}$ на месте выключенного диода имеет вид

$$\overline{\delta}_{14} = \overline{E}_{V_4} - \overline{E}_{U_1} - c_{ij} = 0 + 27 - 16 = 11,$$

где $\overline{\delta}_{14} = \Theta_{14}^0 = 11$. Аналогично определяются $\Theta_{24}^0 = 6$, $\Theta_{35}^0 = 10$, $\Theta_{42}^0 = 8$, $\Theta_{43}^0 = 6$, $\Theta_{51}^0 = 11$. Так как $\Theta_{14}^0 = \Theta_{51}^0 = 11$, при выборе ветви с максимальным $\Theta_{ij}^0$ можно остановиться на любом из них. Выбираем ветвь 51 и рассматриваем все циклы, включающие эту ветвь.

Значение напряжения $L$ при разрыве ветви 51 будет соответствовать $\overline{W}_1$.

В дальнейшем отключаем пятую строку и первый столбец, на пересечении которых находится ветвь 51, и ветвь 15 для избежания зацикливания. Значение потенциалов $U_5^0$ и $V_1^0$ сохраняем.

На втором шаге для полученной матрицы четвертого порядка (рис. 4) повторяем первый, второй и третий режимы и определяем нижнюю границу для всех циклов, содержащих ветвь 51: $W_1 = 59$.

После выявления диодов с нулевыми напряжениями определяем $\Theta'_{14} = 11$, $\Theta'_{24} = 6$, $\Theta'_{35} = 10$, $\Theta'_{42} = 8$ и $\Theta'_{43} = 6$. Ветвь 14 с максимальным $\Theta'_{ij}$ включаем в цикл и в дальнейшем рассматриваем все циклы, включающие ветви 51 и 14. Для избежания подцикла разрываем ветвь 45. Отключаем ветви первой строки и четвертого столбца. За шинами сохраняем значения потенциалов $U'_1$, $U_5^0$ и $V_1^0$, $V'_4$.

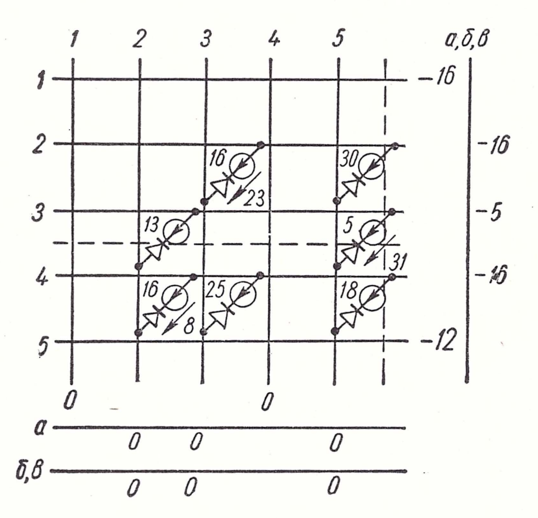


Рис. 5.

На третьем шаге (рис. 5) тем же способом определяем ветвь 35, включающуюся в путь коммивояжера. Отключается третья строка и пятый столбец, производится разрыв ветви 43. Аналогично выявляются ветви 42 и 23, которые вместе с ветвями 51, 14, 35 составляют оптимальный путь коммивояжера, обходящий узлы в порядке 1—4—2—3—5—1.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Литл Дж., Мурти К., Суини Д., Кэрел К.— Экономика и математические методы. «Наука», М., 1965, т. I. вып. I.

2. Hardgrave W. W., Nemhauser G. L. — Salesman and the Longest — Path Problems. Operations Research, 1962, 10, 5.

3. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г. Новые направления в линейном программировании. «Советское радио», М., 1966.

4. Сафроненко В. А. — Настоящий сборник, 129.

5. Шарашидзе Г. К. — Настоящий сборник, 121.

6. Merrill M. Flood. The Traveling Salesman Problem Operations Researsh, 1956, 4.

7. Экономико-математические методы. Вып. II, Методы оптимального планирования. Транспортные задачи. «Наука», М., 1965.

Доложено на семинаре
20 мая 1966 г.

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКОГО ПУТИ, ОХВАТЫВАЮЩЕГО ВСЕ УЗЛЫ ДВУНАПРАВЛЕННОГО ГРАФА

Г. К. ШАРАШИДЗЕ

Задача определения критического пути, охватывающего все узлы двунаправленного графа, заключается в следующем: задается двунаправленный граф, составленный из $n$ узлов и ветвей, соединяющих эти узлы. Каждая ветвь характеризуется величиной $d_{ij}$, где $d_{ij}$ — длина ветви, соединяющей $i$-ый узел с $j$-м. Длины ветвей задаются в виде матрицы $D_{ij}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ (табл. 1), если $i = j$, $d_{ij} = \infty$. Нужно определить путь кратчайшей длины, охватывающей все узлы графа и проходящей через каждый узел не более одного раза. Путь должен состоять из $n$ ветвей и быть замкнутым, т. е. искомый путь является циклом. Обозначим его длину через $L$.

Ниже приводится способ определения цикла минимальной длины, охватывающего все узлы графа.

В качестве исходного решения рассматривается решение задачи о назначениях, в которой при заданных условиях

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \tag{3}$$

определяется минимальное значение целевой функции

$$F = CX, \tag{4}$$

где

$$C = | d_{11} d_{12} \ldots d_{nn} |,$$
$$X^* = | x_{11} x_{12} \ldots x_{nn} |.$$

Допустим, что $N$ есть множество всех узлов графа: $k \in N$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, где $k$ — номер узла.

Решение задачи о назначениях содержит $n$ компонент $x_{ij} = 1$. Ветви графа, которым соответствуют $x_{ij} = 1$, образуют подциклы $q$ ($q = 1, 2, \ldots, p$), охватывающие подмножества узлов $N_q \in N$. Тем самым множество $N$ разбивается на непересекающиеся подмножества $N_q$ ($q = 1, 2, \ldots, p$):

$$N_1 \cup N_2 \cup \ldots \cup N_p = N,$$

$$N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_p = 0.$$

Так как $d_{ij} = \infty$ при $i = j$, подмножества $N_q$ ($q = 1, 2, \ldots, p$) состоят из двух или более элементов, поэтому $p \leqslant \frac{n}{2}$.

Таблица 1

| $i \backslash j$ | 1 | 2 | | $n$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $d_{11}$ | $d_{12}$ | | $d_{1n}$ |
| 2 | $d_{21}$ | $d_{22}$ | | $d_{2n}$ |
| | | | | |
| $n$ | $d_{n1}$ | $d_{n2}$ | | $d_{nn}$ |

Таблица 2

| $s \backslash \lambda$ | 1 | 2 | | $p$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $D_{11}$ | $D_{12}$ | | $D_{1p}$ |
| 2 | $D_{21}$ | $D_{22}$ | | $D_{2p}$ |
| | | | | |
| $p$ | $D_{p1}$ | $D_{p2}$ | | $D_{pp}$ |

Если длина $q$-го подцикла есть $l_q$, тогда их суммарная длина, равная минимальному значению целевой функции (4), меньше или равна длине цикла $L$:

$$\sum_{q=1}^{p} l_q = F \leqslant L. \tag{5}$$

Если строки и столбцы матрицы $D$ переставить таким образом, чтобы номера узлов $k \in N_q$ расположились рядом, тогда получается клеточная матрица (табл. 2), элементы главной диагонали которой $D_{qq}$ ($q = 1, 2, \ldots, p$), содержат ветви, образующие $q$-ые подциклы.

Равенство в выражении (5) имеет место в том случае, когда $p = 1$, т. е. решение задачи о назначениях определяет искомый цикл.

В случае $p \geqslant 2$ на следующем этапе решения нужно определить способ объединения подциклов $q$ ($q = 1, 2, \ldots, p$) так, чтобы приращение целевой функции (4) было бы наименьшим.

Введем понятие оптимального контура, соединяющего два подцикла.

Рассмотрим контур (рис. 1), составленный из четырех элементов матрицы $D$. На таком контуре компоненты оптимального век-

тора $X$ задачи о назначениях могут равняться единице на диагональных элементах, для которых сумма длин одной пары ветвей графа меньше или равна сумме длин пары ветвей, расположенных по другой диагонали.

Любой контур приведенного типа, в котором элементы $d_{ij}$ и $d_{\beta\gamma}$, расположенные на главной диагонали, относятся к разным подматрицам главной диагонали клеточной матрицы, может рассматриваться как соединяющий контур двух подциклов, если $x_{ij} = 1$ и $x_{\beta\gamma} = 1$, остальные два элемента $d_{i\gamma}$ и $d_{\beta j}$, которым соответствуют $x_{i\gamma} = 0$ и $x_{\beta j} = 0$, относятся к подматрицам $D_{\lambda S}$ ($\lambda \neq S$; $\lambda, S = 1, 2, \ldots, p$).

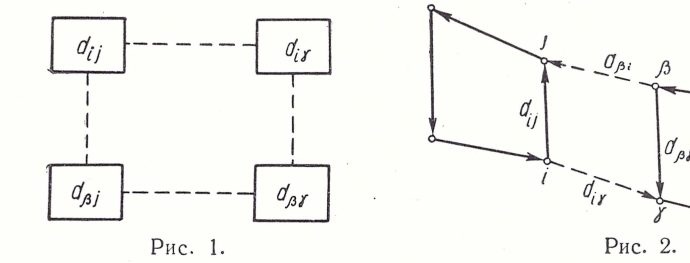



Рис. 1.

Рис. 2.

Пусть заданы два подцикла, показанные на рис. 2. Изъятие из подциклов ветвей $d_{ij}$ и $d_{\beta\gamma}$ и включение ветвей $d_{i\gamma}$ и $d_{\beta j}$ приводит к объединению подциклов. Величина

$$\Delta = (d_{\beta j} + d_{i\gamma}) - (d_{ij} + d_{\beta\gamma}) \tag{6}$$

при условиях

$$d_{ij} \in D_{qq}, \quad d_{i\gamma} \in D_{q\,(q+z)}, \quad d_{\beta j} \in D_{(q+z)\,q},$$
$$d_{\beta\gamma} \in D_{(q+z)\,(q+z)}, \text{ где } z > 0, \quad q + z \leqslant p$$

есть приращение к оптимальному значению целевой функции задачи о назначениях при объединении двух подциклов.

Соединяющих контуров двух подциклов может быть множество. Контур, для которого величина $\Delta$ является минимальной, рассматриваем как оптимальный.

Когда клеточная матрица состоит из четырех элементов (табл. 3), оптимальный контур выявляем следующим образом: добавляем $\alpha$ к подматрицам $D_{11}$ и $D_{22}$ и увеличиваем его от нуля до некоторой наименьшей величины $\alpha_{кон}$, при которой в каком-либо соединяющем контуре будет выполняться условие

$$(d_{\beta j} + d_{i\gamma}) - (d_{ij} + d_{\beta\gamma} + 2\alpha_{кон}) = 0. \tag{7}$$

Такой контур будет оптимальным.

Сравнивая уравнения (6) и (7), получим

$$\Delta = 2\alpha_{кон}.$$

В конкретном случае оптимальный контур соединения подциклов определяется следующим образом. Допустим задана матрица $D = |d_{ij}|$ $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ (табл. 4).

Таблица 3

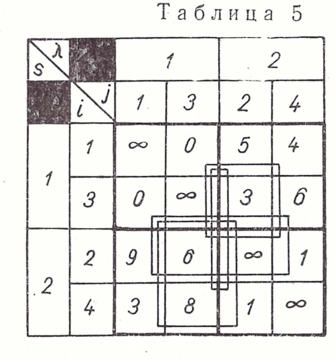
| s \ λ | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | $D_{11}+\alpha$ | $D_{12}$ |
| 2 | $D_{21}$ | $D_{22}+\alpha$ |

Таблица 4

| i \ j | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | ∞ | 5 | 0 | 4 |
| 2 | 9 | ∞ | 6 | 1 |
| 3 | 0 | 3 | ∞ | 6 |
| 4 | 3 | 1 | 8 | ∞ |

Решение задачи о назначениях дает $x_{13} = x_{24} = x_{31} = x_{42} = 1$. Образовались два подцикла 1—3—1 и 2—4—2. Перестановкой строк и столбцов исходной матрицы получим клеточную матрицу (табл. 5), аналогичную приведенной в табл. 3.

Таблица 5



| s \ λ | | 1 | | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|
| | i \ j | 1 | 3 | 2 | 4 |
| 1 | 1 | ∞ | 0 | 5 | 4 |
| | 3 | 0 | ∞ | 3 | 6 |
| 2 | 2 | 9 | 6 | ∞ | 1 |
| | 4 | 3 | 8 | 1 | ∞ |

Таблица 6

| s \ λ | | 1 | | 2 | | 3 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | i \ j | 1 | 6 | 2 | 5 | 3 | 4 |
| 1 | 1 | ∞ | 0 | 1 | 7 | 10 | 15 |
| | 6 | 0 | ∞ | 4 | 4 | 20 | 21 |
| 2 | 2 | 5 | 4 | ∞ | 0 | 8 | 4 |
| | 5 | 3 | 1 | 0 | ∞ | 3 | 5 |
| 3 | 3 | 16 | 17 | 15 | 10 | ∞ | 0 |
| | 4 | 18 | 20 | 20 | 2 | 0 | ∞ |

Подциклы 1—3—1 и 2—4—2, составленные из элементов подматриц $D_{11}$ и $D_{22}$, могут быть соединены контурами, указанными на таблице 5. Добавляя к $D_{11}$ и $D_{22}$ $\alpha$, обнаруживаем, что при росте $\alpha$ от нуля условие (7) раньше всех других выполняется для контура 31—32—42—41, для которого

$$2\alpha_{\text{кон}} = (3 + 3) - (0 + 1) = 5.$$

При исключении из подциклов 1—3—1 и 2—4—2 ветви 31 и 42 и включении ветви 32 и 41 подциклы объединяются, так что приращение к минимальному значению функции (4) является наименьшим. Получается искомый цикл 1—3—2—4—1. Длина цикла

$$L = F + \Delta = F + 2\alpha_{\text{кон}} = 7.$$

В случае, когда $p > 2$, следуем принципу объединения подциклов в порядке наименьших приращений к оптимальному зна-

чению целевой функции (4). Добавляем величину $\alpha$ ко всем подматрицам $D_{qq}$ $(q = 1, 2, \ldots, p)$, и определяем оптимальный контур, объединяющий пару подциклов, а также и $\alpha_{\text{кон}1}$. После этого элементы исходной клеточной матрицы $D_{qq}$ $(q = 1, 2, \ldots, p)$ увеличиваются на $\alpha_{\text{кон}1}$. Получается новая клеточная матрица, для которой выполняется: равенство $d'_{ij} = d_{ij} + \alpha_{\text{кон}1}$, если $d_{ij}$ является элементом одной из подматриц $D_{qq}$.

В противном случае $d'_{ij} = d_{ij}$.

Эту операцию повторяем для новой клеточной матрицы, в которой объединенные подциклы рассматриваются как один подцикл, а остальные остаются изолированными и т. д. до тех пор пока все подциклы не окажутся объединенными.

В случае, когда решение задачи о назначениях определяет три подцикла 1—6—1, 2—5—2 и 3—4—3, задача в виде клеточной матрицы, полученной после соответствующей перестановки строк и столбцов, приведена в табл. 6.

В данном случае объединяются подциклы 1—6—1 и 2—5—2 и получается подцикл 1—2—5—6—1. Соединяющий контур показан на таблице 6 $\alpha_{\text{кон}1} = 1$ и $\Delta_1 = 2\,\alpha_{\text{кон}1} = 2$.

Добавляем $\alpha_{\text{кон}1}$ к подматрицам $D_{11}$, $D_{22}$, $D_{33}$ и получаем новую клеточную матрицу $D'$ (табл. 7).

Таблица 7

| s \ λ | | 1 | | | | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | i \ j | 1 | 6 | 2 | 5 | 3 | 4 |
| 1 | 1 | ∞ | 1 | 1 | 7 | 10 | 15 |
| | 6 | 1 | ∞ | 4 | 4 | 20 | 21 |
| | 2 | 5 | 4 | ∞ | 1 | 8 | 4 |
| | 5 | 3 | 1 | 1 | ∞ | 3 | 5 |
| 2 | 3 | 16 | 17 | 15 | 10 | ∞ | 1 |
| | 4 | 18 | 20 | 20 | 2 | 1 | ∞ |

Таблица 8

| s \ λ | | 1 | | | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | i \ j | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 1 | ∞ | 0 | 0 | 7 | 10 |
| | 2 | 0 | ∞ | 0 | 2 | 15 |
| | 3 | 0 | 0 | ∞ | 20 | 4 |
| 2 | 4 | 12 | 3 | 10 | ∞ | 1 |
| | 5 | 13 | 8 | 2 | 1 | ∞ |

Для определения соединяющего контура подциклов 1—2—5—6—1 и 3—4—3 добавляем величину $\alpha$ к подматрицам $D'_{11}$ и $D'_{22}$. Определяем оптимальный соединяющий контур, показанный в табл. 7, $\alpha_{\text{кон}2} = 4$, $\Delta_2 = 2\,\alpha_{\text{кон}} = 8$. Исключаем из подциклов ветви 25 и 42 и включаем новую пару ветвей 23 и 45. Получаем оптимальный цикл, охватывающий все узлы 1—2—3—4—5—6—1. Его длина $L = 12$.

При вычислении величины $L$ нельзя пользоваться формулой

$$L = F + \Delta_1 + \Delta_2,$$

так как $\Delta_2$ определяется для преобразованной матрицы.

Как видно из рассмотренных примеров, все время приходится решать задачу о назначениях; при этом элементы заданной матрицы расстояний $D$ изменяются определенным образом.

Если задача о назначениях имеет множество нецелочисленных решений, придающих функции цели (4) одно и то́ же значение, тогда она имеет больше одного целочисленных решений. Подциклы, рассмотренные нами, соответствуют целочисленным решениям задачи.

Таблица 9

| λ \ s | | 1 | | | 2 | | 3 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | j \ i | 1 | 3 | 5 | 2 | 4 | 6 | 7 |
| 1 | 1 | ∞ | 0 | 3 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| | 3 | 1 | ∞ | 0 | 2 | 1 | 1 | 3 |
| | 5 | 0 | 1 | ∞ | 2 | 2 | 2 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | ∞ | 0 | 3 | 2 |
| | 4 | 3 | 3 | 1 | 0 | ∞ | 2 | 1 |
| 3 | 6 | 1 | 1 | 3 | 1 | 1 | ∞ | 0 |
| | 7 | 3 | 2 | 1 | 2 | 4 | 0 | ∞ |

В случае, когда задача о назначениях с заданной матрицей расстояний, имеет множество решений, или множество решений возникает в преобразованной, после объединения некоторых подциклов, матрице, то нужно рассматривать всевозможные подциклы.

В задаче, приведенной на табл. 8, образуются два подцикла, охватывающие узлы 1, 2 и 3. Первый обходит узлы в порядке 1—2—3—1, а второй в порядке 1—3—2—1. Подциклы 1—2—1, 1—3—1, 3—2—3 не рассматриваем, так как они объединяются в приведенные два подцикла с нулевым приращением к целевой функции (4).

Узлы 4 и 5 охватываются одним подциклом 4—5—4.

При определении цикла обхода всех узлов, если иметь в виду только подциклы 1—3—2—1 и 4—5—4, контур, соединяющий эти два подцикла, показанный пунктиром на рис. 10, дает целевой функции Т = 2, приращение $\Delta = 6$. Получим цикл 1—3—5—4—2—1 с длиной $L$-8.

В случае рассмотрения подциклов 1—2—3—1 и 4—5—4 получим $\Delta = 3$ и длину цикла 1—2—4—5—3—1, который и является оптимальным циклом, $L = 8$.

Отсюда ясно, что если не рассматривать оба подцикла 1—2—3—1 и 1—3—2—1, мы можем допустить ошибку при решении задачи.

В некоторых задачах с увеличением подматрицы $D_{qq}$ на величину $\alpha$ при поиске соединяющего контура в нескольких подматри-

цах $D_{\lambda s}$ ($\lambda \neq s$; $\lambda$, $s = 1, 2, \ldots, p$) одновременно появляются компоненты $x_{ij} = 1$ ($d_{ij} \in D_{\lambda s}$). Например, в задаче, приведенной на табл. 9, при $\alpha_{\text{кон}} = 1$ во всех подматрицах $D_{\lambda s}$ ($\lambda \neq s$) могут появиться $x_{ij}$ равные единице. В этой задаче уже на первом шаге выявляются несколько циклов обхода всех узлов, которые объединяют три подцикла: 1—3—5—1, 2—4—2 и 6—7—6.

Данная задача имеет четыре равноправных решения:

1—3—5—7—6—4—2—1, 1—2—4—7—6—3—5—1,
1—7—6—4—2—3—5—1, 1—3—6—7—2—4—5—1.

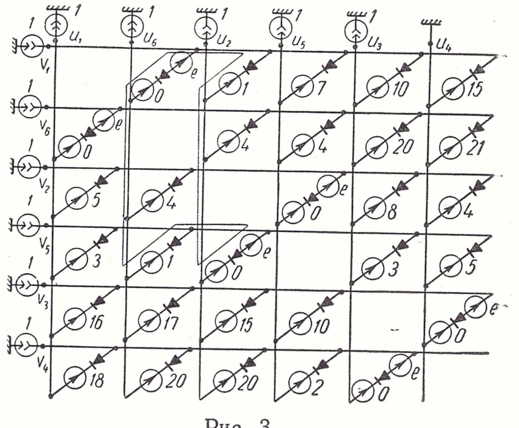


Рис. 3.

В случаях, аналогичных приведенному, процесс решения задачи заканчивается, если подциклы объединены и хотя бы одна подматрица $D_{\lambda s}$ ($\lambda \neq s$; $\lambda$, $s = 1, 2, \ldots, p$) каждого столбца и каждой строки клеточной матрицы, содержит элемент $d_{ij}$, для которого $x_{ij} = 1$.

Данный способ решения рассматриваемой задачи можно реализовать при помощи электрической цепи-аналога, состоящей из источников тока, источников напряжения и диодов.

При помощи цепей, составленных из перечисленных элементов, как известно [1, 2], можно решать класс задач типа транспортной задачи линейного программирования, в частности и задачу о назначениях. Поэтому исходное решение задачи определения оптимального цикла обхода всех узлов можно получить при помощи решения задачи о назначениях с заданной матрицей расстояний $D_{ij}$ ($i, j = 1, 2, \ldots, n$) на моделирующей машине. Из полученного решения определяем подциклы, объединяющие отдельные группы узлов. Перестановкой строк и столбцов по описанному выше способу получим набор клеточной матрицы на модели. К элементам диагональных подматриц $D_{qq}$ ($q = 1, 2, \ldots, p$) добавляются напряжения, пропорциональные величинам $\alpha$. Для экономичности схемы к каждой строке или столбцу подматриц $D_{qq}$ можно последовательно с $E_{ij}$ подключить один источник напряжения $e$.

На рис. 3 и 4 приводятся схемы моделирующих цепей задачи, приведенной на таблицах 6 и 7 на разных этапах решения.

На схеме рис. 3 набрана клеточная матрица, приведенная в табл. 6. Последовательно с источниками напряжения, моделирующими длины ветвей подматриц главной диагонали, включают-

ся источники напряжения $e$, моделирующие величину $\alpha$. Увеличивая величину $e$ от нуля до единицы в схеме, получим контур (рис 3), составленный из токопроводящих ветвей. Этот контур

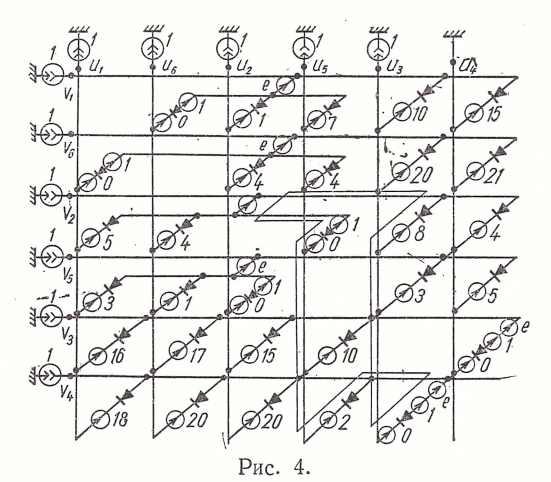



Рис. 4.

соединяет подциклы 1—6—1 и 2—5—2. Получим подцикл 1—2—5—6—1.

Повторяя эту операцию относительно матрицы, аналогичной приведенной в табл. 7, при $e = 4$ выявляем контур, соединяющий подциклы 1—2—5—6—1 и 3—4—3 (рис. 4), и определяем оптимальный цикл обхода всех узлов.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Деннис Дж. Б. Математическое программирование и электрические цепи. ИЛ, М., 1961.
2. Пухов Г. Е. Избранные вопросы теории математических машин. Изд-во АН УССР, К., 1964.



Доложено на семинаре
8 апреля 1966 г.

# ПРИМЕНЕНИЕ АНАЛОГОВЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ ДЛЯ ОПЕРАТИВНО-КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

В. А. САФРОНЕНКО

Одной из важнейших проблем оперативно-календарного планирования работы производственных участков с серийным характером производства является оперативное составление для каждого рабочего места такого календарного графика обработки деталей, при котором, с одной стороны, обеспечивается заданная программа выпуска деталей, а с другой — издержки производства сводятся к минимуму.

Положенный в основу для дальнейшего рассмотрения участок с серийным характером производства состоит из непрерывной сборочной линии (конвейера) и группы из $M$ станков, которые должны обеспечить заданный темп поступления на сборку $n$ различных типов деталей.

Указанную группу станков в общем случае можно подразделить на $N$ последовательных линий идентичных станков с количеством $m_p$ станков в каждой линии

$$M = \sum_{p=1}^{N} m_p . \qquad (1)$$

В издержки производства включены затраты на переналадки и издержки от пролеживания заделов.

Перестройка каждого рабочего места с обработки одного типа детали на другой происходит, как правило, не моментально, а требует затрат рабочего времени и средств. Эти затраты не одинаковы и в общем случае зависят от последовательности обработки заданного наименования деталей.

Каждая деталь $i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) проходит последовательно обработку на станках каждой линии, начиная с $N$-ой, и затем с заданным темпом поступает на сборочный конвейер.

Если окажется, что все необходимые в данный момент времени для обработки $i$-ой детали станки какой-либо из линий участка

заняты обработкой других типов деталей, то в этом случае данная деталь $i$ поступает на некоторое время в межоперационный задел незавершенного производства. Образующиеся в результате пролеживания заделов издержки зависят как от размеров заделов, так и от длительности их пролеживания.

## Математическая формулировка задачи

Введем следующие обозначения:

$V_{i0}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — заданный темп поступления $i$-ой детали на сборочную линию;

$t_{ip}^{\text{шт}} \binom{i = 1, 2, \ldots, n}{p = 1, 2, \ldots, N}$ — штучное время, затрачиваемое на обработку $i$-ой детали на станке $p$-ой линии; обратная величина $\frac{1}{t_{ip}^{\text{шт}}} = V_{ip}$ — производительность станка $p$-ой линии по $i$-ой детали;

$\tau_{ij}^{p}$ — время, затрачиваемое на переналадку станка $p$-ой линии при переходе на обработку $j$-ой детали после окончания обработки $i$-ой детали $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$;

$\alpha$ — коэффициент затрат на переналадки;

$Z_{ip}(t)$ — мгновенное значение величины задела в момент времени $t$ (количество штук $i$-ой детали, находящихся в заделе после обработки на станках $p$-ой линии);

$\beta_{ip}$ — коэффициент затрат от пролеживания задела $Z_{ip}(t)$;

$T$ — период, или отрезок времени, спустя который процесс производства повторяется.

В общем случае для станков $p$-ой линии имеем матрицу переналадок $[\sigma_{ij}^{p}]$ размером $n \times n$, у которой $\sigma_{ij}^{p}$-$\infty$ при $i = j$ (условно исключается переналадка с $i$-ой на ту же $i$-ю деталь), а остальные элементы матрицы могут быть произвольными неотрицательными величинами и не предполагаются симметричными.

Считаем, что затраты на переналадки прямо пропорциональны затрачиваемому на них времени.

При принятых обозначениях выражение для функции-цели, которую необходимо минимизировать, имеет следующий вид:

$$R = \frac{\alpha}{T} \sum_{p} \sum_{i,j} \tau_{ij}^{p} + \frac{1}{T} \int_{0}^{T} \sum_{p=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} \beta_{ip} Z_{ip}(t)\, dt. \qquad (2)$$

Здесь первое слагаемое представляет собой суммарные затраты на переналадки, а второе — суммарные затраты от пролеживания заделов по всем деталям и для всех линий станков, отнесенные к периоду $T$.

## Упрощенная модель серийного участка

Рассмотрим упрощенную модель серийного участка, состоящую из непрерывной сборочной линии и одной линии из $m_1$ идентичных станков (рис. 1).

Для обеспечения заданного темпа поступления деталей на сборочную линию необходимо, чтобы количество $i$-ых деталей, ушедших из задела на сборку за период $T_1$ не превышало то количество

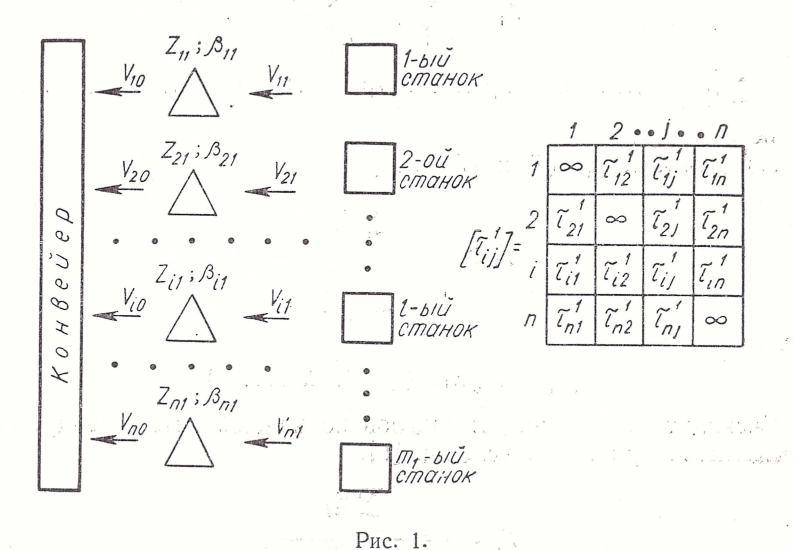



Рис. 1.

тех же $i$-ых деталей, которое поступит в течение времени $T_1$ в задел после обработки их на станках.

Отсюда должно выполняться следующее неравенство:

$$\sum_{l=1}^{m_1} \frac{t_{il}}{t_{il}^{\text{шт}}} \geqslant V_{i0} T_1 \ (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3}$$

где $t_{il}$ — время обработки $i$-ой детали за период $T_1$ для $l$-го станка линии.

Примем, что для всех станков время $t_{il}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ одинаково, т. е.

$$t_{i1} = t_{i2} = \ldots = t_{i,\, m_1} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{4}$$

и, кроме того, на всех станках линии каждая $i$-я деталь запускается в обработку с относительным сдвигом по времени $\Delta T$:

$$\Delta T = \frac{T_1}{m_1}. \tag{5}$$

При таком предположении издержки от пролеживания при прочих равных условиях будут минимальными, а условие (3) запишется в виде

$$m_1 \frac{t_{il}}{t_{il}^{\text{шт}}} \geqslant V_{i0} T_1 \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{6}$$

С другой стороны

$$T_1 = \sum_{i=1}^{n} t_{i1} + \sum_{i,\ j} \tau_{ij}^{1}, \tag{7}$$

где $\sum\limits_{i,j} \tau_{ij}^{1}$ — суммарное время, затрачиваемое каждым из станков на переналадки.

Из соотношений (6) и (7) следует

$$T_1 \geqslant \frac{\sum\limits_{i,\ j} \tau_{ij}^{1}}{1 - \frac{1}{m_1} \sum\limits_{i=1}^{n} g_{i1}}, \tag{8}$$

где

$$g_{i1} = V_{i0} t_{i1}^{\text{шт}} \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{9}$$

Очевидно, что величины заделов по каждой детали будут минимальными при таком условии [1]:

$$T_1 = \frac{\sum\limits_{i,\ j} \tau_{ij}^{1}}{1 - \frac{1}{m_1} \sum\limits_{i=1}^{n} g_{i1}}. \tag{10}$$

Из выражения (10) вытекает необходимое и достаточное условие, при выполнении которого линия из $m_1$ станков сможет обеспечить заданный темп поступления всех деталей на сборку:

$$1 - \frac{1}{m_1} \sum_{i=1}^{n} g_{i1} > 0. \tag{11}$$

Время, затрачиваемое каждым из станков на обработку $i$-ой детали в течение одного периода, можно определить, согласно выражениям (6) и (10) по формуле

$$t_{i1} = g_{i1} \frac{\sum\limits_{i,\ j} \tau_{ij}^{1}}{m_1 - \sum\limits_{i=1}^{n} g_{i1}} \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{12}$$

Введем на время такое предположение: пусть за период $T_1$ каждая деталь запускается в обработку на каждом из станков линии

только один раз (этому случаю соответствуют обозначения $R_1^0$, $\sum\limits_{i,j} \tau_{ij}^{1,0}$, $T_1^0$).

Тогда после вычисления интеграла получим выражение для функции-цели

$$R_1^0 = \frac{\alpha m_1}{T_1^0} \sum_{i,\ j} \tau_{ij}^{1,0} + \frac{T_1^0}{2m_1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_{i1}\{\bar{g}_{i1}\}}{t_{i1}^{\text{шт}}} (1 - \{\bar{g}_{i1}\}). \tag{13}$$

Здесь и в дальнейшем с помощью символа $\{\bar{\varphi}\}$ будем обозначать дробную часть некоторого числа $\varphi$.

С учетом условия (10) выражение (13) можно представить в таком виде:

$$R_1^0 = \alpha \left( m_1 - \sum_{i=1}^{n} g_{i1} \right) + \left( \sum_{i,\ j} \tau_{ij}^{1,0} \right) \sum_{i=1}^{n} b_{i1}, \tag{14}$$

где

$$b_{i1} = \frac{\beta_{i1}\{\bar{g}_{i1}\}}{2t_{i1}^{\text{шт}} \left( m_1 - \sum\limits_{i=1}^{n} g_{i1} \right)} (1 - \{\bar{g}_{1i}\}) \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{15}$$

Как следует из уравнений (14) и (15), величину $R_1^0$ можно уменьшить только за счет выбора такой последовательности запуска деталей в обработку, которой будет отвечать минимальное суммарное время на переналадки $\min \sum\limits_{i,\ j} \tau_{ij}^{1,0}$, т. е. тем самым вся проблема сводится к решению задачи коммивояжера для заданной матрицы переналадок $[\tau_{ij}^1]$ [2].

Решив задачу коммивояжера, мы получим искомую последовательность запуска деталей в обработку и $\min \sum\limits_{i,j} \tau_{ij}^{1,0}$, а затем по уравнениям (10), (12), (5) и (14) определяем соответствующие данному случаю величины $T_1^0$, $t_{i1}^0$, $\Delta T^0$ и $\min R_1^0$.

Величины начальных заделов $Z_{i1}(0)$ (значения $Z_{i1}(t)$ при $t = 0$ для всех $i$) определяются следующим образом.

Если за начало периода $T_1^0$ берется момент запуска в обработку $i$-ой детали на некотором $l$-ом станке линии, то

$$Z_{i1}(0) = 0. \tag{16}$$

Если вслед за $i$-ой деталью по условию минимизации $R_1^0$ должна начаться обработка $j$-ой детали, то

$$Z_{j1}(0) = \frac{1}{t_{j1}^{\text{шт}}} \left[ \{\bar{g}_{j1}\} \left\{ \overline{\frac{m_1}{T_1^0}(t_{il}^0 + \tau_{ij}^1)} \right\} - \right.$$

$$\left. - \max \left[ 0,\ \left\{ \overline{\frac{m_1}{T_1^0}(t_{il}^0 + \tau_{ij}^1)} \right\} - \frac{T_1^0}{m_1} \left( 1 - \{\overline{g_{j1}}\} \right) \right] \right]. \tag{16a}$$

Для следующей за $j$-ой деталью детали $\gamma$ при определении $Z_{\gamma 1}(0)$ подставляем в формулу (16а) соответственно $t_{\gamma 1}^{\text{шт}}$, $g_{\gamma 1}$, $(t_{il}^{0} + \tau_{ij}^{1} + t_{jl}^{0} + \tau_{j\gamma}^{1})$ и т. д.

Таким образом, при условии однократного запуска каждой детали в обработку за время периода мы можем определить параметры, необходимые для составления оптимального календарного графика [3].

Теперь снимем это ограничение. Пусть, исходя из условия минимума величины функции-цели, деталь $i$ за соответствующий период $T_1$ должна запускаться в обработку на каждом станке линии $x_{i1}$ раз $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

В этом случае

$$t_{i1} = \sum_{s=1}^{x_{i1}} t_{i1}^{s} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{17}$$

$$T_1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{s=1}^{x_{i1}} t_{i1}^{s} + \sum_{i,\,j} \tau_{ij}^{1} \quad (x_{i1} \geqslant 1). \tag{18}$$

Здесь $t_{i1}^{s}$ — слагаемое общего времени обработки $i$-ой детали на каждом станке линии за период $T_1$; $\sum_{ij} \tau_{ij}^{1}$ $(x_{i1} \geqslant 1)$ — суммарное время всех произведенных за период $T_1$ переналадок при $x_{i1} \geqslant 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

По аналогии с предыдущим получим

$$T_1 = \frac{\sum_{i,\,j} \tau_{ij}^{1}\,(x_{i1} \geqslant 1)}{1 - \frac{1}{m_1} \sum_{i=1}^{n} g_{i1}}, \tag{10a}$$

$$t_{i1} = g_{i1} \frac{\sum_{i,\,j} \tau_{ij}^{1}\,(x_{i1} \geqslant 1)}{m_1 - \sum_{i=1}^{n} g_{i1}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{12a}$$

Выражение для $R_1$ после вычисления интеграла с учетом (18) запишется в виде

$$R_1 = \alpha \left( m_1 - \sum_{i=1}^{n} g_{i1} \right) + \left[ \sum_{i,\,j} \tau_{ij}^{1}\,(x_{i1} \geqslant 1) \right] \sum_{i=1}^{n} b_{i1} \left[ \sum_{s=1}^{x_{i1}} (\varepsilon_{i1}^{s})^2 \right], \tag{19}$$

где

$$\varepsilon_{i1}^{s} = \frac{t_{i1}^{s}}{t_{i1}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{20}$$

Заметим, что $\varepsilon^s_{i1} < 1$ и $\sum_{s=1}^{x_{i1}} (\varepsilon^s_{i1})^2 < 1$ при $x_{i1} > 1$. Исходя из физических соображений, смысл которых сводится к тому, что любому запуску $i$-ой детали из общего количества $x_{i1}$ запусков должен предшествовать запуск другого типа детали, следует, что переменные $x_{i1}$ должны удовлетворять такому условию:

$$\max x_{i1} \leqslant \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} x_{i1}. \tag{21}$$

Для упрощения в качестве некоторого приближения примем, что

$$\varepsilon^1_{i1} = \varepsilon^2_{i1} = \ldots = \varepsilon^{x_{i1}}_{i1} = \frac{1}{x_{i1}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{22}$$

В этом случае выражение для $R_1$ примет вид

$$R_1 = \alpha\left(m_1 - \sum_{i=1}^{n} g_{i1}\right) + \left[\sum_{i,j} \tau^1_{ij}\,(x_{i1} \geqslant 1)\right]\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{b_{i1}}{x_{i1}}\right). \tag{23}$$

Для определения такой последовательности обработки деталей, при которой при заданных значениях $x_{i1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ достигается минимум величины $R_1$, необходимо, как следует из выражения (23), решить задачу коммивояжера для матрицы $[\tau^1_{ij}\,(x_{i1} \geqslant 1)]$ размера $\left(\sum_{i=1}^{n} x_{i1}\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} x_{i1}\right)$ и вместе с этим найти $\min \sum_{i,j} \tau^1_{ij}$ $(x_{i1} \geqslant 1)$.

Матрица $[\tau^1_{ij}\,(x_{i1} \geqslant 1)]$ образуется из заданной матрицы $[\tau^1_{ij}]$ путем последовательного добавления к последней снизу и справа $(x_{i1} - 1)$-го количества $i$-ых строк и столбцов $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Последняя строка и столбец матрицы $[\tau^1_{ij}\,(x_{i1} \geqslant 1)]$ будут иметь порядковый номер $n + \sum_{i=1}^{n}(x_{i1} - 1) = \sum_{i=1}^{n} x_{i1}$.

Заметим, что элементы данной матрицы имеют такую особенность:

$$\tau^1_{kj} = \tau^1_{ik} = \infty \text{ при } \begin{cases} i,\ j = k, \\ i,\ j = n + \sum_{\gamma=1}^{k-1}(x_{\gamma 1} - 1) + 1,\ n + \\ + \sum_{\gamma=1}^{k-1}(x_{\gamma 1} - 1) + 2,\ \ldots,\ n + \sum_{\gamma=1}^{k}(x_{\gamma 1} - 1). \end{cases} \tag{24}$$

$$k = 1, 2, \ldots, n.$$

Из сравнения выражений (14) и (19) с учетом замечания относительно величины $\sum_{s=1}^{x_{i1}} (\varepsilon_{i1}^s)^2$ следует, что для заданных $x_{i1}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) при $\min \sum_{i,j} \tau_{ij}^1 \ (x_{i1} \geqslant 1) \leqslant \min \sum_{i,j} \tau_{ij}^{1,0}$, $\min R_1 \ (x_{i1} \geqslant 1) < \min R_1^0$, т. е. в этом случае календарный график при запуске всех или части деталей в обработку за период $T_1$ более одного раза на каждом из $m_1$ станков будет лучше, чем при однократном запуске.

Если же $\min \sum_{i,j} \tau_{ij}^1 (x_{i1} \geqslant 1) > \min \sum_{i,j} \sigma_{ij}^{1,0}$, то все будет зависеть от конкретных значений величин $b_{i1} \sum_{s=1}^{x_{i1}} (\varepsilon_{i1}^s)^2$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), в выражении (19) или при предположении (22) — от величины $\sum_{i=1}^{n} \frac{b_{i1}}{x_{i1}}$.

Величина $\min \sum_{i,j} \tau_{ij}^1 \ (x_{i1} \geqslant 1)$ есть однозначная функция от $n$ переменных $x_{i1}$, удовлетворяющих ограничению (21). Обозначим ее через $K \ (x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{n1})$ или $K \ (\vec{x}_1)$ и назовем функцией коммивояжера:

$$K(\vec{X}_1) = K(x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{n1}) = \min \sum_{i,j} \tau_{ij}^1 \ (x_{ij} \geqslant 1). \tag{25}$$

В ряде случаев к ограничению (21) добавляются ограничения на величину максимума задела $Z_{j1}(t)$, например, из-за ограниченности площадей для хранения незавершенных деталей. Это приводит к системе неравенств такого вида:

$$\frac{1}{x_{j1}} \cdot \frac{\sum_{i,j} \tau_{ij}^1 (x_{i1} \geqslant 1)}{m_1 - \sum_{i=1}^{n} g_{i1}} \cdot \frac{\{\overline{g}_{j1}\}}{t_{j1}^{\text{шт}}} (1 - \{\overline{g}_{j1}\}) \leqslant H_{j1}, \tag{26}$$

$$j \in P \subset \{1, 2, \ldots, n\},$$

где $H_{j1}$ — предельная допустимая величина задела $Z_{j1}(t)$.

В итоге проблема определения всех параметров, необходимых для составления оптимального календарного графика, сводится к следующей задаче:

определить вектор $\vec{X}_1 = [x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{n1}]$, при котором достигается минимум функции

$$F_1 = K(\vec{X}) \sum_{i=1}^{n} \frac{b_{i1}}{x_{i1}} \tag{27}$$

при следующих ограничениях:

$$x_{i1} \geqslant 1 \text{ (целые числа) } (i = 1, 2, \ldots, n) \quad (28)$$

$$\max x_{i1} \leqslant \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} x_{i1} \quad (21)$$

и

$$K(\vec{X}_1) - h_{j1} x_{j1} \leqslant 0, \quad j \in P \subset \{1, 2, \ldots, n\}, \quad (29)$$

где

$$h_{j1} = \frac{\beta_{j1} \cdot H_{j1}}{2b_{j1}}. \quad (30)$$

Ограничение (21) можно еще записать в таком виде:

$$C_1 \vec{X}_1 \geqslant 0, \quad (31)$$

где $C_1 = [c_{ij}^1]$ — симметричная матрица $n \times n$, у которой

$$c_{ij}^1 = \begin{cases} -1 \text{ при } i = j, \\ 1 \text{ при } i \neq j \end{cases} \quad (31а)$$

и $\vec{X}_1'$ — транспонированный вектор $\vec{X}_1$.

Для некоторых конкретных производственных участков данная задача иногда упрощается. Так, если время на переналадку зависит в большей степени от того, какая деталь запускается в обработку, и в меньшей степени от типа той детали, которая перед этим обрабатывалась, то в таком случае элементы матрицы $[\sigma_{ij}^1]$, принадлежащие одному столбцу, исключая элементы главной диагонали, будут различаться незначительно, т. е.

$$\tau_{ij}^1 = \begin{cases} \infty & \text{при } i = j, \\ a_{j1} \geqslant 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases} \quad (32)$$

Тогда

$$K(\vec{X}_1) = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} x_{i1} \quad (33)$$

и задача сводится к следующей: определить вектор $\vec{X}_1$, при котором достигается минимум нелинейной функции

$$\Phi_1 = \left( \sum_{i=1}^{n} a_{i1} x_{i1} \right) \left( \sum_{i=1}^{n} \frac{b_{i1}}{x_{i1}} \right) \quad (34)$$

при следующих ограничениях:

$$\vec{X}_1 > 0, \quad (35)$$

$$\max x_{i1} \leqslant \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} x_{i1}, \tag{21}$$

$$D_1 \vec{X}_1 \leqslant 0, \tag{36}$$

где $D_1 = [d^1_{ij}]$ — матрица $m \times n$ ($m$ — количество индексов из $\{1, 2, \ldots, n\}$, входящих в $P$), у которой

$$d^1_{ij} = \begin{cases} a_{i1} - h_{i1} < 0 & \text{при } i \in P, \\ a_{j1} \geqslant 0 & \text{при } i \overline{\in} P. \end{cases} \tag{37}$$

Если ограничение (36) отсутствует или, в случае наличия его, если будет выполняться условие

$$h_{j1} \geqslant \begin{cases} \sqrt{\dfrac{a_{j1}}{b_{j1}}} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i1} b_{i1} \quad \text{при} \quad \sqrt{\dfrac{b_{\gamma 1}}{a_{\gamma 1}}} \leqslant \dfrac{1}{2} \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{\dfrac{b_{i1}}{a_{i1}}}, \\ \left. \begin{array}{l} a_{\gamma 1} + \dfrac{\sum\limits_{i=1,\, i \neq \gamma}^{n} \sqrt{a_{i1} b_{i1}}}{\sum\limits_{i=1,\, i \neq \gamma}^{n} \sqrt{\dfrac{b_{i1}}{a_{i1}}}}, \text{ если } i = \gamma \\ \sqrt{\dfrac{a_{j1}}{b_{j1}}} \cdot \sum\limits_{i=1,\, i \neq \gamma}^{n} \sqrt{\dfrac{b_{i1}}{b_{i1}}} (a_{\gamma 1} + a_{i1}), \text{ если } i \neq \gamma \end{array} \right\} \\ \quad \text{при} \quad \sqrt{\dfrac{b_{\gamma 1}}{a_{\gamma 1}}} > \dfrac{1}{2} \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{\dfrac{b_{i1}}{b_{i1}}}, \end{cases} \tag{38}$$

решение имеет следующий вид:

$$x_{j1} = \begin{cases} q_1 \dfrac{\sqrt{\dfrac{b_{j1}}{a_{j1}}}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{\dfrac{b_{j1}}{a_{i1}}}} \quad \text{при} \quad \sqrt{\dfrac{b_{\gamma 1}}{a_{\gamma 1}}} \leqslant \dfrac{1}{2} \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{\dfrac{b_{i1}}{a_{i1}}}, \\ \left. \begin{array}{ll} q_1, & \text{если } i = \gamma \\ q_1 \dfrac{\sqrt{\dfrac{b_{j1}}{a_{j1}}}}{\sum\limits_{i=1,\, i \neq \gamma}^{n} \sqrt{\dfrac{b_{i1}}{a_{i1}}}}, & \text{если } i \neq \gamma \end{array} \right\} \text{ при } \sqrt{\dfrac{\beta_{\gamma 1}}{a_{\gamma 1}}} > \\ \qquad > \dfrac{1}{2} \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{\dfrac{b_{i1}}{a_{i1}}}. \end{cases} \tag{39}$$

Здесь

$$\frac{b_{\gamma 1}}{a_{\gamma 1}} = \max\left(\frac{b_{11}}{a_{11}}, \frac{b_{21}}{a_{21}}, \ldots, \frac{b_{n1}}{a_{n1}}\right) \tag{40}$$

и $q_1$ — положительный целый коэффициент, при котором значения $x_{i1}$ ($j = 1, 2, \ldots, n$) будут взаимно простыми числами.

В общем же случае минимальное значение функции (34) следует искать на множестве решений, удовлетворяющих ограничениям (35), (21) и (36).

К вычислительным устройствам, предназначенным для решения оперативных производственных задач часто предъявляется ряд специфических требований.

Одним из важнейших таких требований является обеспечение большой оперативности получения решения, наличие возможности простого изменения входных переменных и быстрого просмотра различных возможных вариантов решения.

С другой стороны, для подобных задач особенно высокая точность решения как правило не требуется из-за относительно невысокой точности исходных данных.

Разработанная в Институте кибернетики АН УССР под руководством чл.-корр. АН УССР Г. Е. Пухова теория квазианалогового моделирования позволила к настоящему времени создать ряд схем для оперативного решения различного рода задач математического программирования с использованием относительно небольшого объема счетно-решающей аппаратуры [4—6].

Ввиду того, что минимизируемая функция (34) и ограничения (35), (21) и (36) являются однородными (решение получается с точностью до постоянного множителя), исходную задачу можно свести к задаче минимизации линейной формы при ограничениях в виде линейных неравенств и одного нелинейного уравнения, что в свою очередь позволяет облегчить реализацию модели.

В новой постановке задача будет формулироваться следующим образом:
требуется найти минимум функции

$$\mu_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} x_{i1} \tag{41}$$

при условиях (21), (36), (35) и

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{b_{i1}}{x_{i1}} = E_1 . \tag{42}$$

Данную задачу предлагается решать на квазианалоговой модели типа $\rho$ путем принудительного изменения целевой функции $\mu_1$.

Принципиальная схема модели приведена на рис. 2. Обратимый линейный преобразователь (ОЛП) моделирует систему неравенств (36) и линейную форму (41). Обратимый функциональный преобра-

зователь, использующий обычные функциональные блоки для моделирования зависимости вида $y = \frac{1}{x}$ и источник напряжения $E_1$, реализует нелинейное ограничение (42).

С помощью индикатора наибольшего напряжения, выполненного на диодах $Д_1$, $Д_2$, ..., $Д_n$, и блока для получения полусуммы искомых переменных моделируется ограничение (21).

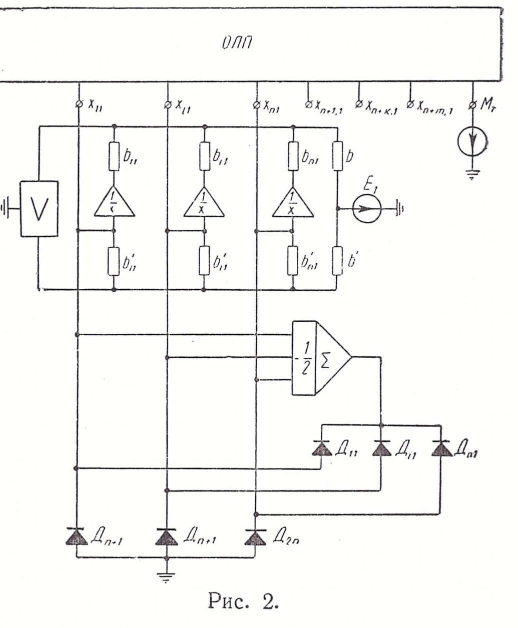



Рис. 2.

Диоды $Д_{n+1}$, $Д_{n+2}$, ..., $Д_{2n}$ включены для реализации условия неотрицательности переменных (35).

Принудительное изменение величины целевой функции осуществляется с помощью регулируемого источника напряжения $\mu_1$.

Данная модель одновременно с определением неизвестных $x_{i1}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), которые представляют собой количества запусков $i$-ой детали в обработку за время периода $T_1$, позволяет с помощью найденного минимального значения напряжения $\mu_1$ получать в некотором масштабе суммарную длительность переналадок и величину этого периода — уравнения (10а), (25) и (33).

Определив $x_{i1}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) с помощью ранее указанной матрицы $[\tau^1_{ij} (x_{i1} \geqslant )]$ находим одну из возможных последовательностей обработки деталей.

Пусть эта последовательность имеет такой вид:

$$t^1_{i1} \tau^1_{ij} t^1_{j1} \ldots \tau^1_{\alpha i} t^2_{i1} \tau^1_{i\beta} \ldots \tau^1_{\gamma i} t^k_{i1} \tau^1_{i\delta} \ldots \tau^1_{qi} t^{x_{i1}}_{i1} \tau^1_{ir} \ldots t^{x_{\varepsilon 1}}_{\varepsilon 1} \tau^1_{\varepsilon 1}$$

$$i, j, \alpha, \beta, \gamma, \delta, q, r, \varepsilon \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Тогда для составляющих $t_{ij}^{1}$, $t_{i2}^{1}$, ..., $t_{i1}^{k}$, ..., $t_{if}^{x_{i1}}$ времени обработки $i$-ой детали (при условии, что все станки линии работают с относительным сдвигом по времени, определяемым согласно выражению (5)) будет справедлива следующая система линейных уравнений:

$$t_{i1}^{s} = \begin{cases} \dfrac{(\tau_{ij}^{1} + t_{j1}^{1} + \ldots + \tau_{\alpha i}^{1})\,\{\overline{g_{i1}}\}}{1 - \{\overline{g_{i1}}\}}, & s = 1, \\ \dfrac{(\tau_{i\beta}^{1} + \ldots + t_{\gamma 1}^{1})\,\{\overline{g_{i1}}\}}{1 - \{\overline{g_{i1}}\}}, & s = 2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \dfrac{(m_1 - 1)\,T_1}{m_1} + \dfrac{(\tau_{i\delta}^{1} + \ldots + \tau_{qi}^{1})\,\{\overline{g_{i1}}\}}{1 - \{\overline{g_{i1}}\}}, & s = k, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \dfrac{(\tau_{ir}^{1} + \ldots + t_{\varepsilon 1}^{x_{\varepsilon 1}} + \tau_{\varepsilon 1}^{1})\,\{\overline{g_{i1}}\}}{1 - \{\overline{g_{i1}}\}}, & s = x_{i1}. \end{cases} \quad \text{при } m_1 - 1 \leqslant g_{i1} < m_1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (43а)$$

Здесь индекс $k$ относится к той составляющей $t_{i1}^{s}$, которой соответствует минимум времени от момента окончания $t_{i1}^{s}$ до момента начала $t_{i1}^{s+1}$ (в нашем случае полагаем, что таким минимальным временем будет $(\tau_{i\delta}^{1} + \ldots + \tau_{q1}^{1})$)

$$t_{i1}^{s} = \begin{cases} \dfrac{(\tau_{ij}^{1} + t_{j1}^{1} + \ldots + \tau_{\alpha i}^{1})\,g_{i1}}{m_1 - g_{i1}}, & s = 1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \dfrac{(\tau_{1\delta}^{1} + \ldots + \tau_{q1}^{1})\,g_{i1}}{m_1 - g_{i1}}, & s = k, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \dfrac{(\tau_{ir}^{1} + \ldots + t_{\varepsilon 1}^{x_{\varepsilon 1}} + \tau_{\varepsilon 1}^{1})\,g_{i1}}{m_1 - g_{i1}}, & s = x_{i1}. \end{cases} \quad \text{при } g_{i1} < m_1 - 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (43б)$$

Таким образом для упрощенной модели серийного участка получим все необходимые параметры для составления оптимального календарного графика.

### Модель серийного участка из $N$ линий станков

Рассмотрим теперь модель серийного участка, состоящего из конвейера и $N$ линий станков.

Предварительно разобьем каждый из заделов $Z_{ip}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$; $p = 2, 3, \ldots, N$) на два составляющих задела

$$Z_{ip}(t) = Z'_{ip}(t) + Z''_{ip}(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ p = 2, 3, \ldots, N), \qquad (44)$$

и затем положим, что из задела $Z''_{ip}$ детали с заданным для них темпом поступления на конвейер $V_{i0}$ переходят в задел $Z'_{ip}$.

После такого преобразования получим $N$ в некотором смысле независимо работающих элементарных участков (рис. 3):

№ 1: $V_{i0} \leftarrow Z_{i1}, \; \beta_{i1} \leftarrow V_{i1}, \; m_1, \; [\tau'_{ij}] \leftarrow Z'_{i2}, \; \beta_{i2},$

№ 2: $V_{i0} \leftarrow Z''_{i2}, \; \beta_{i2} \leftarrow V_{i2}, \; m_2, \; [\tau^2_{ij}] \leftarrow Z'_{i3}, \; \beta_{i3},$

№ $N$: $V_{i0} \leftarrow Z''_{iN} \, \beta_{iN} \leftarrow V_{iN}, \; m_N, \; [\tau^N_{ij}] \leftarrow Z_{i,\,N+1}; \; \beta_{i,\,N+1}.$

Здесь индекс $N+1$ относится к заготовительному складу.

Рис. 3.

Математическая модель для каждого из полученных элементарных участков полностью аналогична модели ранее рассмотренного упрощенного участка. Изменится лишь выражение (15) для определения коэффициента $b_{ip}$:

$$b_{ip} = \frac{(\beta_{ip} + \beta_{i,\,p+1}) \{\overline{g_{ip}}\}}{2t^{\text{шт}}_{ip}\left(m_p - \sum\limits_{i=1}^{n} g_{ip}\right)} (1 - \{\overline{g_{ip}}\}) \quad (i=1, 2, \ldots, n; \; p=1, 2, \ldots, N). \tag{45}$$

Значение функции-цели для всего участка в целом определится таким образом:

$$R = \sum_{p=1}^{N} R_p, \tag{46}$$

где $R_p$ — значение функции-цели для $p$-го элементарного участка.

Определив ранее рассмотренным способом параметры оптимального календарного графика для каждого элементарного участка, получим

$$\min_p R = \sum_{p=1}^{N} \min R_p. \tag{47}$$

Величину $\min\limits_p R$ можно еще дополнительно уменьшить за счет последующего осуществления последовательной синхронизации ра-

боты элементарных участков во времени, что приведет к дополнительному уменьшению издержек от пролеживания заделов. Примером полной синхронизации является поточная линия — частный случай серийного участка, которая характерна тем, что все операции по изготовлению деталей производятся одновременно.

В результате синхронизации получим

$$\min_t \min_p R < \min_p R. \tag{48}$$

В случае, если исходные параметры какого-либо из элементарных участков изменяются, например вышел надолго из строя или добавлен в $p$-ю линию новый станок, то нет необходимости пересчитывать заново параметры оптимального календарного графика для всего участка в целом. Достаточно рассчитать эти параметры лишь для тех элементарных участков, которых коснулись изменения, и затем провести синхронизацию.

При таком способе оптимизации в общем случае не будет достигнут глобальный оптимум. Но здесь же необходимо подчеркнуть, что поиски глобального оптимума при решении подобного рода задач наталкиваются на чрезвычайные трудности.

С другой стороны, учитывая, что

$$\beta_{i1} > \beta_{i2} > \ldots > \beta_{i,\,N} > \beta_{i,\,N+1} \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{49}$$

можно с большим основанием ожидать, что указанным выше путем мы получим календарный график для всего серийного участка в целом со значением функции-цели, находящимся вблизи глобального минимума.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Шкурба В. В., Подчасова Т. П.— В кн.: Материалы научных семинаров по теоретическим и прикладным вопросам кибернетики. «Наукова думка», К., 1963.

2. Литл Дж., Мурти К., Суини Д., Кэрел К.— В кн.: Экономика и математические методы, «Наука», М., 1965, т. I, вып. I.

3. Ведута Н. И., Лапшин С. В., Сафроненко В. А. — В кн.: Автоматизированные системы управления. Сборник научно-технических статей. Минск, 1965.

4. Пухов Г. Е. Избранные вопросы теории математических машин. К., Изд-во АН УССР, К., 1964.

5. Борковский Б. А., Васильев В. В., Токарева О. Н. — В кн.: Вычислительная техника в управлении. Сборник трудов III Всесоюзной конференции — семинара по теории и методам математического моделирования. «Наука», М., 1964.

6. Клепикова А. Н. — Настоящий сборник, 162.

Доложено на семинаре
6 мая 1966 г.

# ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ И ЗАДАЧИ О КРАТЧАЙШЕМ ПУТИ НА СТАБИЛИТРОНАХ

Г. К. ШАРАШИДЗЕ

Как известно [1, 2], из диодов, источников напряжения и источников тока можно построить электрические цепи-аналоги для множества задач распределения потока в цепи, в том числе для транспортной задачи и задачи о кратчайшем пути. Если параметры цепей удовлетворяют условиям задачи, то эти цепи автоматически приходят в состояние, когда распределение токов в ветвях соответствует решению задачи.

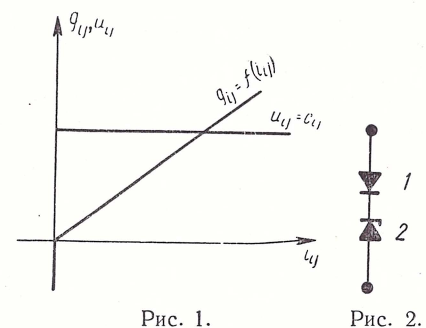


Рис. 1. Рис. 2.

Большое количество независимых источников напряжения в электрической цепи-аналоге делают модели данного типа несколько громоздкими. В работе [3] делалась попытка упростить эти схемы. Для транспортной задачи двухполюсник, составленный из диода и источника напряжения, заменялся переменным сопротивлением и переключаемым источником напряжения. Это привело к сложному итерационному процессу. Модель утратила свойство автоматического поиска решения, а следовательно, и оперативность.

Ранее нами рассматривалась электрическая модель транспортной задачи, составленная из источников тока и нелинейных сопротивлений, обладающих свойством односторонней проводимости.

Проводимость нелинейного элемента изменялась пропорционально току:

$$g_{ij} = \frac{1}{c_{ij}} i_j ,$$

где $c_{ij}$ — маршрутная цена перевозки.

Характеристика нелинейного элемента приводится на рис. 1. Падение напряжения на таком элементе $u_{ij} = C_{ij}$ при $i_{ij} > 0$.

Из анализа электрической цепи, составленной из источников тока и нелинейных пассивных элементов, видно, что эта цепь является физической моделью транспортной задачи.

Характеристику нелинейного элемента можно воспроизвести при помощи двухполюсника, приведенного на рис. 2. Двухполюсник состоит из диода *1* и стабилитрона *2*, включенного против проводящего напряжения диода.

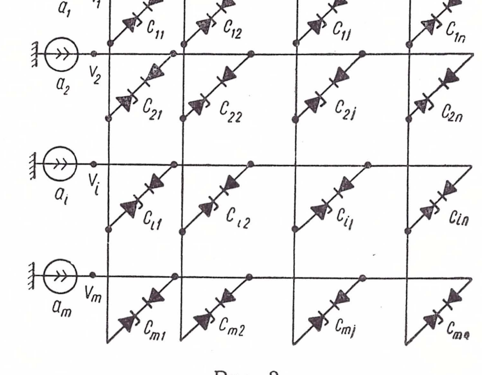


Рис. 3.

На рис. 3 приводится схема электрической модели, матрица стоимости которой построена из обычных диодов и стабилитронов.

Указанная матрица состоит из пассивных элементов, тогда как в схеме, составленной из источников тока, источников напряжения и диодов каждая строка или каждый столбец питается от отдельного независимого источника напряжения [4]. Очевидно, что применение стабилитронов приводит к значительной экономии оборудования и упрощает схему модели. При этом схема на рис. 3, также как и схема с матрицей, построенной на диодах и источниках напряжения, автоматически приходит в состояние, соответствующее решению задачи.

Маршрутную цену перевозки можно представить в виде двоичного числа:

$$c_{ij} = \sum_{\gamma=-n}^{n} a_\gamma 2^\gamma,$$

где

$$a_\gamma = \begin{cases} 0 \\ 1. \end{cases}$$

Если каждому двоичному разряду подобрать стабилитрон $D_\gamma$, стабилизирующий напряжение $u_\gamma$, пропорциональное величине основания разряда

$$u_\gamma = a 2^\gamma,$$

то для набора маршрутной стоимости перевозки ветви можно использовать схему, приведенную на рис. 4. Разомкнутое состояние

ключа соответствует значению коэффициента $a_\gamma = 1$, а замкнутое — значению $a_\gamma = 0$.

На практике оказывается достаточным рассмотрение величин маршрутных стоимостей перевозок в пределах двух десятичных знаков.

На стабилитронах Д808, Д809, Д810, Д811, Д813, Д815 Е и диодах Д202 были построены моделирующие схемы для решения задач небольших размеров. Одна из них приводится на рис. 5.

Вывод результатов решения производился при помощи измерения токов в ветвях, или измерения узловых потенциалов $v_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, $u_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

Были разработаны схемы источника тока (рис. 6), ток которого можно устанавливать

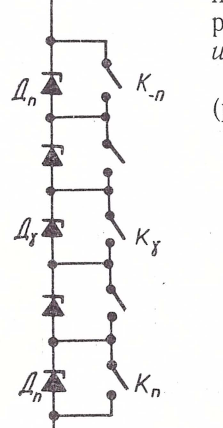
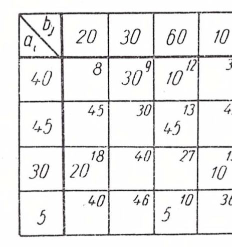



Рис. 4.



| $a_i$ \ $b_j$ | 20 | 30 | 60 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 40 | 8 | 9 30 | 12 10 | 31 |
| 45 | 45 | 30 | 13 45 | 42 |
| 30 | 18 20 | 40 | 27 | 15 10 |
| 5 | 40 | 46 | 10 5 | 36 |

Рис. 5.

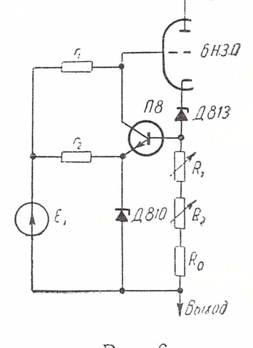



Рис. 6.

в пределах 0,1—5 *ма*, и приемника тока (рис. 7) с диапазоном регулирования тока 0,1—30 *ма*. Так как потенциалы узлов изменяются в пределах $\pm$ 60 *в*, то указанные схемы обеспечивают стабилизацию тока с точностью до 1%.

Стабилизаторы имеют небольшое динамическое сопротивление. При 50-процентном отборе можно выбрать стабилитроны с динамическим сопротивлением не более 10 *ом*, при изменении тока от 0,1 до 5 *ма*. При этом максимальное динамическое сопротивление модели ветви, составленной из шести последовательно соединенных стабилитронов, будет не более 60 *ом*. А шести стабилитронов достаточно для представления маршрутной цены перевозок величиной в пределах двух десятичных знаков в двоичном коде.

Если в качестве диода, обеспечивающего однонаправленность перевозки груза по маршрутам, использовать диоды Д202 или Д203, то анализ погрешности схемы показывает, что модель, построенная на стабилитронах, будет выдавать решение с точностью не менее 3%.

Эффективным оказывается применение стабилитронов в модели-

рующих цепях задачи о кратчайшем пути. В этом случае, как и в случае транспортной задачи, значительно упрощается схема и сохраняются все положительные стороны схемы, построенной на ди-

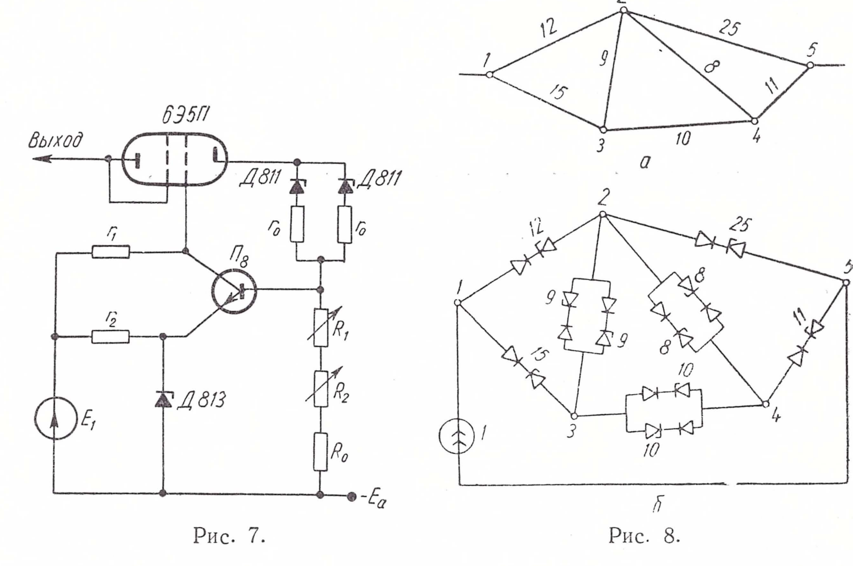



Рис. 7.

Рис. 8.

одах и источниках напряжения. На рис. 8, *а* и 8, *б* приводится сеть и ее электрическая цепь-аналог, построенная на стабилитронах. Кратчайший путь определяется между узлами *1* и *5*. Он состоит из ветвей 12—24—45.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Деннис Дж. Б. Математическое программирование и электрические цепи. ИЛ, М., 1961.

2. Пухов Г. Е. Избранные вопросы теории математических машин, Изд-во АН УССР, 1964.

3. Витенберг И. М., Ефремов А. К. — Труды IV Всесоюзной конференции семинара по теории и методам математического моделирования. «Наукова думка», К., 1964.

4. Васильев В. В. Вопросы построения схем моделирующих устройств для решения транспортной задачи линейного программирования, Семинар «Методы математического моделирования и теории электрических цепей», КДНТП, К., 1964.



Доложено на семинаре
8 апреля 1966 г.

# ЦИФРОВАЯ МОДЕЛЬ СЕТЕВОГО ГРАФИКА

А. Г. ДОДОНОВ

Сетевой график позволяет определить конфигурацию и величину критического пути и величины временных характеристик отдельных работ. Определение временных характеристик осуществляется в настоящее время на электронных аналоговых моделирующих устройствах [2] и цифровых вычислительных машинах.

Одним из основных преимуществ цифровых вычислительных машин является высокая точность при определении временных характеристик. Однако цифровые вычислительные машины пока не позволяют оперативно и наглядно разыгрывать различные ситуации, возможные при анализе сетевого графика.

Известная электрическая модель сетевого графика для определения критического пути [4] является типичным аналоговым устройством. Аналоговые вычислительные устройства обладают исключительно высоким быстродействием, позволяющим им оперативно и наглядно решать широкий класс задач, рассматривать определенные ситуации на сетевом графике. Но точность определения временных характеристик и точность установки исходных данных невысоки. Другим недостатком аналоговых устройств является то, что с увеличением объема сетевых графиков увеличивается напряжение, моделирующее длительность критического пути. Это затрудняет техническую реализацию аналоговых моделей сетевых графиков большого объема.

Комбинированные вычислительные устройства, построенные на использовании цифровых элементов с аналоговым построением функциональной части устройства, позволяют сочетать преимущества цифровых и аналоговых вычислительных машин.

Временная разновидность задачи сетевого планирования и управления с дискретно-задаваемыми продолжительностями отдельных работ и логическим характером качественной информации достаточно хорошо поддается моделированию на цифровых элементах.

В цифровой модели сетевого графика продолжительность отдельной работы моделируется пропорциональным количеством импульсов. Это повышает точность установки исходных данных сете-

вого графика и точность определения его временных характеристик. Построение модели сетевого графика большого объема не вызывает затруднений, так как подсчет большого числа импульсов не приводит к техническим трудностям.

Цифровая модель сетевого графика состоит из моделей работ и моделей событий, набираемых в соответствии с конфигурацией сетевого графика. В качестве отдельной модели работы можно выбрать элемент задержки времени с регулируемой длительностью. Моделями событий для задачи о длиннейшем пути будут схемы совпадений «И», т. е. импульс на выходе модели события появится только тогда, когда все работы, входящие в это событие, выполнятся.

Все временные характеристики сетевого графика определяются числом импульсов, которое пропорционально временной характеристике.

Число импульсов между моментом поступления пускового импульса в начальное событие и моментом появления импульса в конечном событии пропорционально длине критического пути.

Ранний срок начала работы пропорционален числу импульсов между моментом поступления первого импульса в начальное событие и моментом появления импульса на выходе этой работы.

Наиболее поздний срок начала какой-либо работы определяется как разность между числом импульсов, пропорциональных длине критического пути, и числом импульсов между моментом поступления первого импульса на вход этой работы и моментом появления импульса в конечном событии.

Наиболее поздний срок окончания какой-либо работы определяется разностью между числом импульсов, пропорциональных длине критического пути, и числом импульсов между моментом поступления импульса на выход этой работы и моментом появления импульса в конечном событии.

Резерв времени для какой-либо работы определяется разностью между числом импульсов, пропорциональных наиболее позднему началу этой работы, и числом импульсов, пропорциональных раннему сроку начала работы.

Техническая реализация цифровой модели сетевого графика может быть различной. В качестве модели работы может применяться ждущий мультивибратор, магнитострикционная линия задержки, триггерные счетчики и т. д.

Ниже рассматривается один из вариантов цифровой модели сетевого графика. Функциональная схема состоит из счетчиков и импульсно-потенциальных элементов (рис. 1).

Основным элементом модели работы (рис. 2) является $n$-разрядный десятичный счетчик на декатронах. В него перед началом работы модели заносится число импульсов, дополняющее длительность работы до полной емкости счетчика, т. е. заносится количество импульсов, равное ($10^n$ — $t_{ij}$), где $n$ — количество разрядов счетчика, $t_{ij}$— количество импульсов, пропорциональное длительности работы.

Таким образом, на выходе счетчика появится импульс после поступления на вход числа импульсов, пропорционального длительности работы. Функциональная схема записи количества импульсов в счетчик модели работы дана на рис. 3.

В задающий счетчик заносится число импульсов, пропорциональное длительности работы, в прямом коде. Затем триггерная схе-

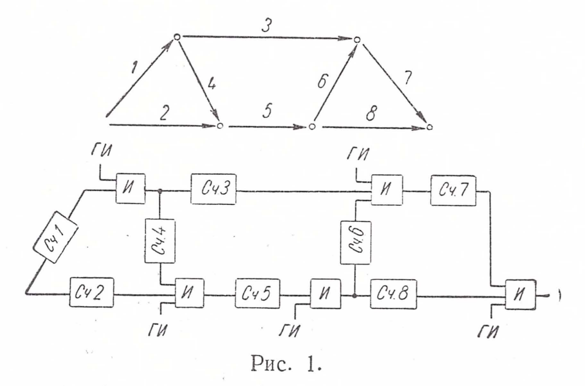



Рис. 1.

ма Т переключается в такое состояние, что через схему И импульсы поступают в счетчик модели работы и в задающий счетчик. После поступления в задающий счетчик $(10^n - t_{ij})$ импульсов триггерная схема возвращается в исходное состояние. При этом в модель работы записывается $(10^n - t_{ij})$ импульсов.

В состав модели работы входят также схема выделения и схема местной индикации.

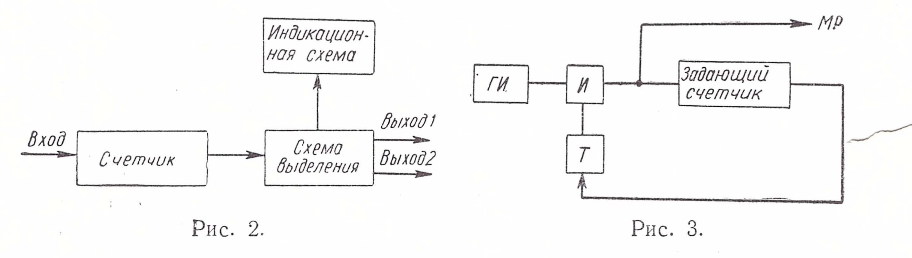



Рис. 2.

Рис. 3.

Схема выделения позволяет определить, какая из работ, входящих в одно событие, завершилась последней, и сигнализирует о выполнении этой работы.

Схема местной индикации предназначена для визуальной индикации работ, лежащих на критическом пути, и состоит из схемы совпадения И и индикационного элемента на тиратроне с холодным катодом МТХ-90.

Модель события состоит из схемы совпадения И, счетчика и триггерной схемы Т. Функциональная схема модели события представлена на рис. 4. На входы схемы И подаются импульсы от генератора

ГИ, сигналы об окончании работ, входящих в это событие, и сигнал об окончании регенерации содержимого моделей работ, выходящих из этого события.

Счетчик модели события имеет максимальную емкость, равную максимальной емкости счетчика модели работы. При помощи этого счетчика осуществляется регенерация содержимого счетчика в моделях работ, выходящих из данного события.

Рис. 4.

Рассмотрим принцип работы цифровой модели на примере одного события, в которое входит две работы и выходит одна работа (рис. 5).

Пусть в модель работы МР1 записано 35 импульсов, в МР2 — 61 импульс и в МР3 — 10 импульсов. Полная емкость счетчиков модели работы и модели события составляет 100 импульсов.

Ранее было сказано, что в модель работы записывается число импульсов, дополняющее число импульсов, пропорциональных длительности работы до полной емкости счетчика модели работы. Зна-

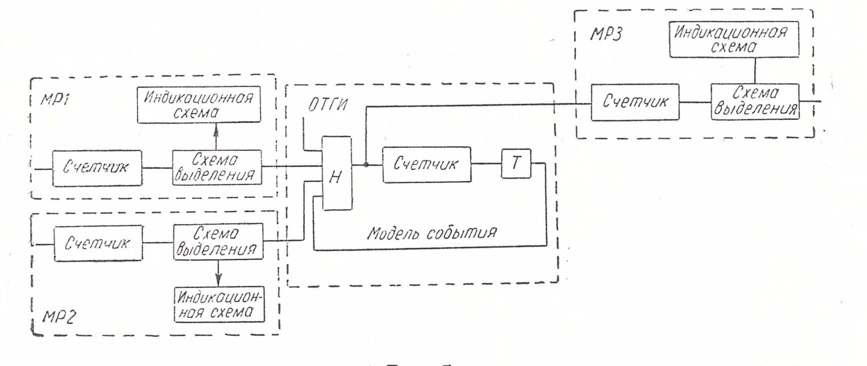



Рис. 5.

чит, длительности работ МР1, МР2 и МР3 равны соответственно 65, 39 и 90 импульсов.

Счетчик модели события перед началом работы устанавливается в «0».

При поступлении импульсов на вход МР1 и МР2 происходит их заполнение. После прихода 39-го импульса в модель работы МР2 на ее выходе появится импульс, который устанавливает схему выделения во включенное состояние. На выходе этой схемы появится сигнал о том, что работа закончилась. Сигнал поступает в схему И модели события и схему местной индукции.

Когда в модель работы МР1 поступает 65-й импульс, на ее выходе появится импульс, который переводит схему выделения этой работы во включенное состояние. Схема выделения МР2 выключается, сигнал с индикационного элемента МР2 снимается. Однако при этом остается сигнал, поступающий на схему И, события о том, что работа закончена.

Сигнал из схемы выделения поступает на схему И модели события и на индикационную схему этой работы. Из рассмотренного вид-

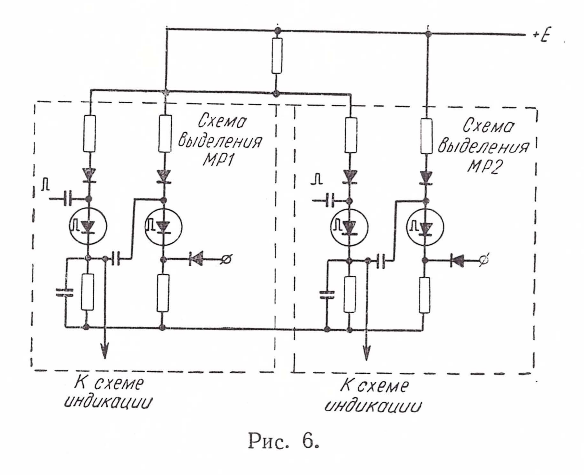



Рис. 6.

но, что индицироваться будет работа, которая последней закончится в событии.

На рис. 6 приведена принципиальная схема двух схем выделения и их соединение в одном событии.

Так как из обеих моделей работ пришел сигнал об их окончании, импульсы от генератора ГИ поступают через схему совпадения И модели события на вход модели работы МР3 и на вход счетчика модели события. После поступления на вход счетчика модели работы 80 импульсов, на выходе ее появляется импульс, сигнализирующий выполнение этой работы. При этом в счетчик модели события поступает число импульсов, равное продолжительности работы МР3, т. е. до полного заполнения счетчика модели события необходимо заслать в этот счетчик еще $100 - t_{ij}$ импульсов. После полного заполнения счетчика модели события на его выходе появляется сигнал, воздействующий на триггерную схему Т. Эта схема запрещает поступление импульсов на вход модели события от генератора ГИ. Счет импульсов в модели работы МР3 также прекращается. В счетчике этой работы оказывается записанным $100 - t_{ij}$ импульсов, т. е. длительность работы в дополнительном коде. Отсюда видно, что произошло считывание и регенерация числа импульсов в модели работы.

Рассмотрим один из возможных вариантов построения схемы измерения временных характеристик цифровой модели сетевого графика.

Длительность критического пути сетевого графика определяется после записи исходных данных в модели работ. Функциональная схема для определения длительности критического пути представлена на рис. 7. Импульсы от генератора ГИ подаются в начальное событие и счетчик измерения. Как только появится в конечном событии графика сигнал, он прекращает через триггерную схему Т подачу импульсов в счетчик измерения.

Счетчик измерения устроен таким образом, что длительность критического пути запоминается, и в нужные моменты времени сно-

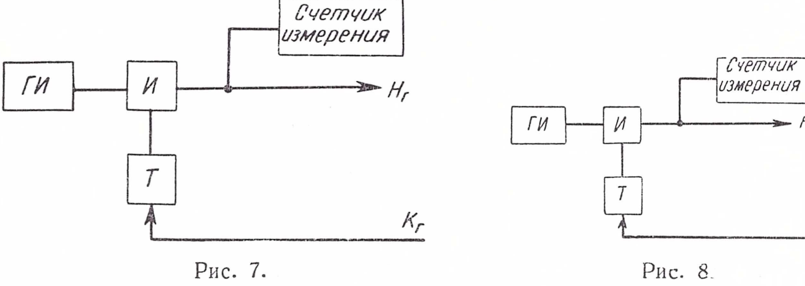



Рис. 7. Рис. 8.

ва используется. Счетчик измерения позволяет производить суммирование и вычитание импульсов.

Ранний срок начала работы определяется согласно функциональной схеме рис. 8. Импульсы от генератора ГИ поступают в начальное событие и счетчик измерения. По появлении первого импульса на входе модели работы, ранний срок начала которой нужно определить, подается сигнал через триггерную схему Т на прекращение подачи импульсов и в счетчик измерения. В счетчике измерения окажется записанным число импульсов, равное максимальному пути между началом графика и началом этой работы.

Аналогичным образом определяется временная характеристика графика — ранний срок окончания работы. Отключение подачи импульсов в счетчик измерения осуществляется после появления импульса на выходе какой-либо работы.

Наиболее поздние сроки начала работ, окончания работ и их резервы времени достаточно удобно можно получить с помощью метода дополнительной работы, описанного в работе [4]. В цифровой модели дополнительной работой является линия задержки.

Наиболее поздний срок начала работы определяется согласно функциональной схеме (рис. 9). Для определения этой временной характеристики необходимо иметь длительность критического пути и максимальную длительность пути от начала какой-либо работы и до конца графика. Разность этих величин и является наиболее позд-

ним сроком начала работы. После определения длительности критического пути она запоминается в счетчике измерения. При измерении наиболее позднего срока начала работы длительность критического пути заносится в счетную схему счетчика измерения. Счетчик измерения ставится в режим вычитания. Начало работы отрывается от события и подключается к выходу ЛЗ. Максимальная длительность от начала данной работы до конца графика определяется следующим образом. Импульсы поступают в начало графика и линию задержки. В счетчик измерения импульсы не поступают. Длительность задержки времени выбирается равной длительности критического пути. После того, как пройдет число импульсов, равное длительности критического пути, цифровая модель сетевого графика будет находиться в таком состоянии, что все события подготовлены к выдаче импульсов в модели работ. После прихода первого импульса в начало модели работы, наиболее позднее начало которой определяется, разрешается поступление импульсов в счетчик измерения от ГИ. Происходит вычитание этих импульсов из числа импульсов, записанных ранее в счетчик измерения. Когда появится импульс в конечном событии графика, прекращается подача импульсов в счетчик измерения. Полученная разность и будет пропорциональна наиболее позднему сроку начала работы.

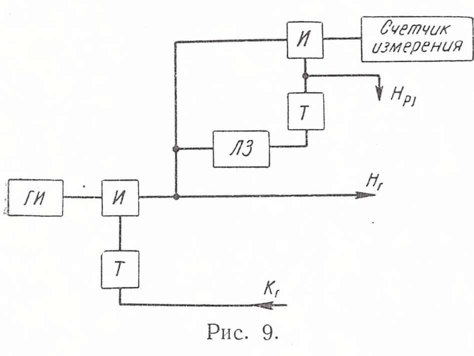


Рис. 9.

Определение наиболее позднего срока окончания работы и ее резерва времени осуществляется аналогично определению наиболее позднего срока начала работы.

Для индикации критического пути собирается схема индикации сетевого графика. Схема индикации по конфигурации воспроизводит сетевой график. В каждой ветви индикационной схемы имеется вентиль, управляемый выходным сигналом схемы выделения соответствующей работы и индикационный элемент.

Пример индикационной схемы для сетевого графика по рис. 1 приведена на рис. 10. После измерения критического пути импульс, который появился в конечном событии, поступает в точку А индикационной схемы. Этот сигнал пройдет только через те вентили и загорятся те индикационные элементы, которые соответствуют работам, лежащим на критическом пути.

Цифровые модели сетевых графиков, благодаря целому ряду особенностей, обладают дополнительными возможностями для использования их при планировании и управлении ходом разработок.

Вот некоторые из них.

1. Возможна реализация режима остановки текущего времени, иначе говоря, модель дает ответ на вопрос: «Что будет через известный промежуток времени после начала работ? Какие работы будут уже выполнены? Какие будут в стадии выполнения?». Для реализации этого режима достаточно остановить в заданный момент времени генератор тактовых импульсов и произвести индикацию состояния выходных сигналов схем выделения. Если на выходе этих схем нет сигнала, то работа или не выполнена, или находится в стадии выполнения. Содержимое счетчиков моделей работ свидетельствует о степени выполнения работ.

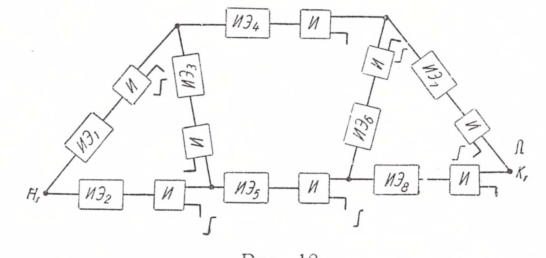


Рис. 10.

2. Существенно облегчается обмен информацией с универсальными машинами и автоматизированный вывод на печать результатов измерения.

3. Возможно увеличение диапазона длительностей работ за счет реализации своеобразного режима «плавающей запятой». Для реализации этого режима достаточно применить несколько тактовых генераторов с кратными частотами (при применении генератора с частотой, например, в 10 раз ниже частоты основного генератора, длительность соответствующей работы увеличивается в 10 раз).

4. Цифровые модели позволяют моделировать сетевые графики большого объема.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Васильев В. В. — В кн.: Математическое моделирование и электрические цепи. Вып. III. «Наукова думка», К., 1965.

2. Васильев В. В., Тимошенко А. Т.— В кн: Математическое моделирование и электрические цепи. Вып. IV. «Наукова думка», К., 1966.

3. Пухов Г. Е., Васильев В. В. Устройство для моделирования сетевого графика. Авторское свидетельство № 175749. Бюллетень изобретений № 20, 1965 г.

4. Васильев В. В., Клепикова А. Н., Тимошенко А. Г. Решение задач оптимального планирования. «Наукова думка», К., 1966.



Доложено на семинаре
8 апреля 1966 г.

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ О МИНИМАЛЬНОМ ПОТОКЕ

А. Г. ТИМОШЕНКО

В отличие от известной проблемы определения максимального потока [1, 2] задача о минимальном потоке содержит ограничения потока снизу [1]. По условию через каждую ветвь должен протекать поток не менее заданного. Допустимое решение определяет поток, протекающий через сеть и удовлетворяющий этому условию. Оптимальное решение заключается в определении минимального потока среди допустимых. Задача близка к задаче определения максимального потока и на практике встречается довольно часто [1]. Математическая формулировка в виде задачи линейного программирования заключается в следующем.

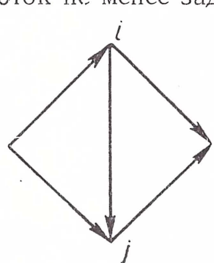


Рис. 1.

Задана сеть, содержащая один входной (н) и один выходной (к) узел (например, сеть рис. 1). Для каждой ветви задан нижний предел потока $d_{ij}$, Определить

$$\min X = \sum_i x_{ik} = \sum_i x_{\text{н}i} \tag{1}$$

при условиях

$$x_{ij} \geqslant d_{ij} \geqslant 0 \tag{2}$$

и

$$\sum_i x_{ij} = \sum_i x_{ji}, \quad j \neq \text{н, к.} \tag{3}$$

Здесь $x_{ij}$ — поток, протекающий через ветвь $(i, j)$.

Неравенство (2) указывает на ограничение потока снизу для каждой ветви. Выражение (3) формулирует условие непрерывности потока.

В работе [1] указан алгоритм преобразования данной задачи к задаче о максимальном потоке. В действительности, приведенный алгоритм преобразования применим только к одному пути. Суть алгоритма заключается в следующем [1].

1. Определяем поток $z \geqslant d_{ij}$ для всего множества графа.

2. Устанавливаем $d'_{ij} = z - d_{ij}$ для каждой ветви и при помощи алгоритма Форда — Фулкерсона определяем такой наибольший поток, что $x_s \leqslant d'_{ij}$ для всего пути.

3. Имеем $z - x_s \geqslant z - d'_{ij} = d_{ij}$.

Поэтому $z - x_s$ есть искомый поток для всего пути $s$.

При решении задачи о максимальном потоке часто используют теорему Форда — Фулкерсона, согласно которой максимальный поток определяется минимальным сечением сети.

В задаче о минимальном потоке нет аналога теоремы Форда — Фулкерсона. В этом легко убедиться на простом примере. Пусть в графе рис. 1 заданы следующие величины нижних границ потоков в ветвях (в условных единицах):

$$d_{\text{н}i} = 5, \quad d_{\text{н}j} = 4, \quad d_{ij} = 3, \quad d_{i\text{к}} = 3, \quad d_{j\text{к}} = 6.$$

Простым сечением с максимальной пропускной способностью является множество $U = \{(\text{н}, i), (i, j), (j, \text{к})\}$.

Величина потока этого сечения равна

$$\sum_{(m, n) \in U} d_{mn} = d_{\text{н}i} + d_{ij} + d_{j\text{к}} = 5 + 3 + 6 = 14.$$

Однако, если канал (н, $i$) имеет величину потока, равную нижнему пределу пропускной способности, то для узла $i$ не будет выполняться условие непрерывности. Условие непрерывности потока для узла $i$ следующее:

$$x_{\text{н}i} = x_{i\text{к}} + x_{ij}.$$

Для данного примера очевидно, что требуется как минимум 6 единиц, чтобы выполнялось это условие при ограничениях (2). Таким образом, необходимая величина $x_{\text{н}i} = 6$, а величина потока сечения $U$ равна $6 + 3 + 6 = 15$.

Однако более тщательный анализ убеждает нас, что при этом для узла $j$ также не выполняется условие (3) при ограничениях (2), так как поток поступает больше, чем исходит. Поэтому требуется, чтобы поток ветви был равен сумме поступающих потоков. Минимально допустимая величина потока через ветвь должна равняться $x_{j\text{к}} = x_{\text{н}j} + x_{ij} = 4 + 3 = 7$. Величина потока разреза и теперь равна 16, а величина минимального, протекающего через сеть, равна $X = \sum_p x_{\text{н}p} = \sum_q x_{q\text{к}} = 6 + 4 = 3 + 7 = 10$.

Другой особенностью задачи о минимальном потоке является требование однонаправленности ветвей. Так как для каждой ветви задан минимальный поток, требуется указать направление потока. В противном случае требование определенного потока в двух направлени-

ях эквивалентно установлению нулевого потока. В дальнейшем будем рассматривать только направленные графы, не содержащие циклов.

Принципы построения моделей задач об экстремальных потоках содержат много общего. Для задачи о максимальном потоке они заключаются в реализации арифметической операции суммирования потоков для параллельных ветвей и логической операции определения минимума для последовательных ветвей. При этом поток, ограниченный минимальной пропускной способностью ветви, устанавливается единым для всех последующих и предыдущих последовательных ветвей. В силу этого свойства техническая реализация модели по указанному алгоритму требует использования обратимых решающих элементов [3].

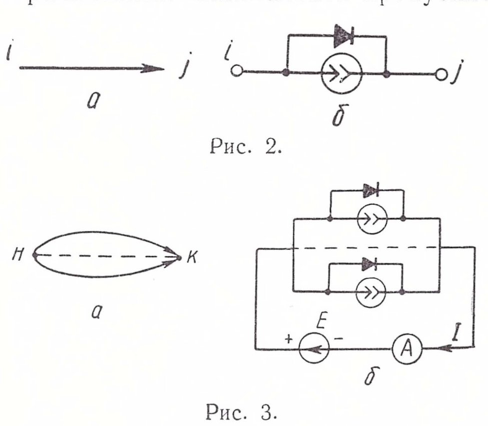



Рис. 2.

Рис. 3.

Принципы построения модели задачи о минимальном потоке состоят в реализации следующих операций: суммирование потоков для параллельных соединений и определение максимальной величины среди заданных нижних границ потока для последовательного соединения.

Простая схема модели задачи о минимальном потоке может быть построена аналогично модели Денниса [1] для задачи о максимальном потоке. Каждой ветви сети соответствует электрическая ветвь, состоящая из параллельного соединения источника тока и диода. Включение диода и источника тока согласное (рис. 2). Величина тока источника пропорциональна нижней границе величины потока данной ветви:

$$I_{ij} = \gamma d_{ij}, \tag{4}$$

где $\gamma$ — масштабный коэффициент.

Для параллельных ветвей (рис. 3, *а*) величины токов просуммируются, если между суммарными точками включить источник э. д. с. (рис. 3, *б*). Амперметр А фиксирует минимальный ток, обусловленный нижними границами потоков в каждой ветви:

$$I = \sum_i I_i = \sum_i \gamma d_i = \gamma X. \tag{5}$$

Последовательности ветвей (рис. 4, *а*) моделируются последовательным соединением электрических ветвей (рис. 4, *б*). Через источник э. д. с., включенный между началом и концом последователь-

ности ветвей, протекает ток, равный максимальной величине тока одного из источников

$$I = \max_i I_i = \max_i \gamma d_i = \gamma X. \tag{6}$$

Пример модели для сети общего вида (рис. 1) приведен на рис. 5.

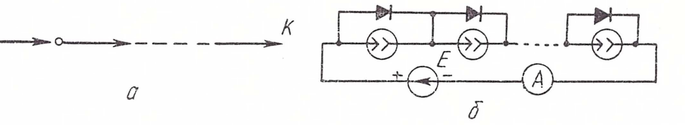



Рис. 4.

Для рассмотренных моделей включение источника э. д. с. принципиально не обязательно. При соединении полюсов модели н, к ток, протекающий по соединению, пропорциональный искомому потоку.

Схема модели задачи может быть реализована на базе стандартных блоков вычислительных машин непрерывного действия.

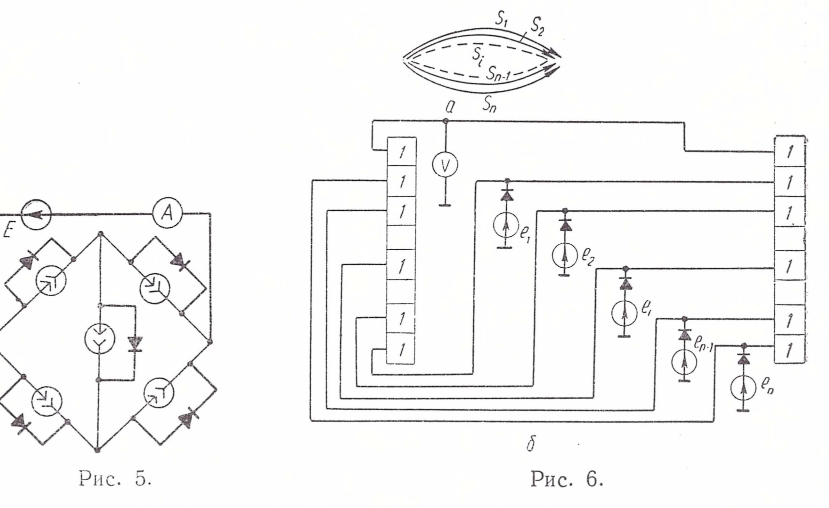



Рис. 5. Рис. 6.

Модель $n$ параллельных ветвей приведена на рис. 6. Здесь в качестве модели ветви используется ограничитель напряжения, состоящий из последовательного соединения диода и источника э. д. с. Величина источника э. д. с. пропорциональна нижней границе пропускной способности, соответствующей ветви. Узел моделируется обратимым сумматором. Модель узла с двумя входящими и двумя исходящими ветвями приведена на рис. 7. Модели ветвей, входящих в узел, включены непосредственно в полюса сумматора, а модели ветвей, исходящих из узла, подключены через инверторы, что обеспечивает согласование знаков напряжений.

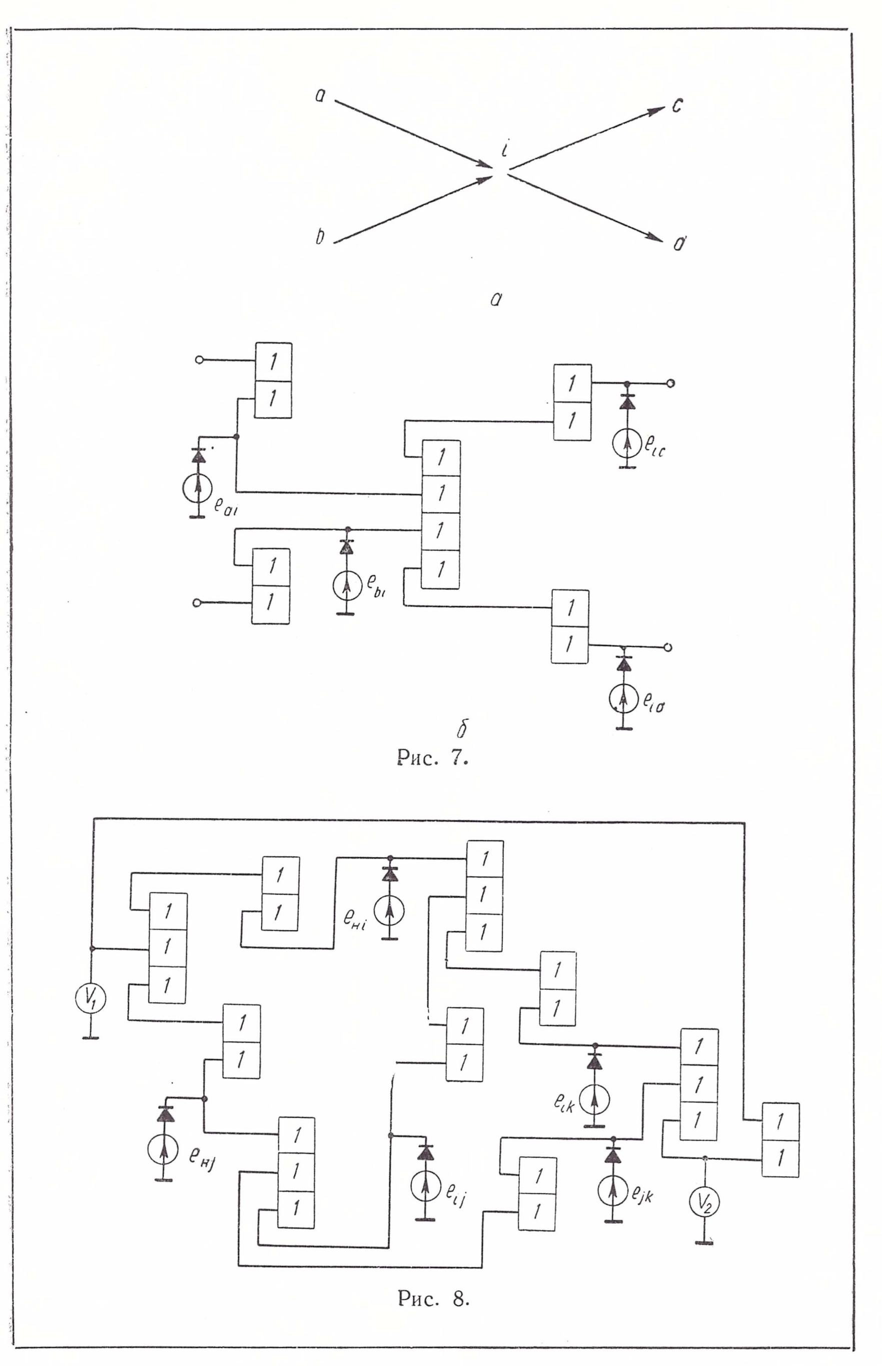


Рис. 7.

Рис. 8.

Пример модели сети рис. 1 приведен на рис. 8.

В точках включения вольтметров $V_1$ и $V_2$ должны устанавливаться напряжения, пропорциональные минимальному потоку. Эти величины равны, но противоположны по направлению и могут быть соединены через инвертор. Равенство показаний вольтметров $V_1$ и $V_2$ при отключенном инверторе может служить признаком правильного набора задачи.

Таким образом, предложенные схемы позволяют моделировать задачу о минимальном потоке. В схеме рис. 5 моделирующей величиной является ток, а в схеме рис. 8 — напряжение.

Рассмотренные схемы можно использовать при исследовании сетевых задач небольшого объема.

## ЛИТЕРАТУРА

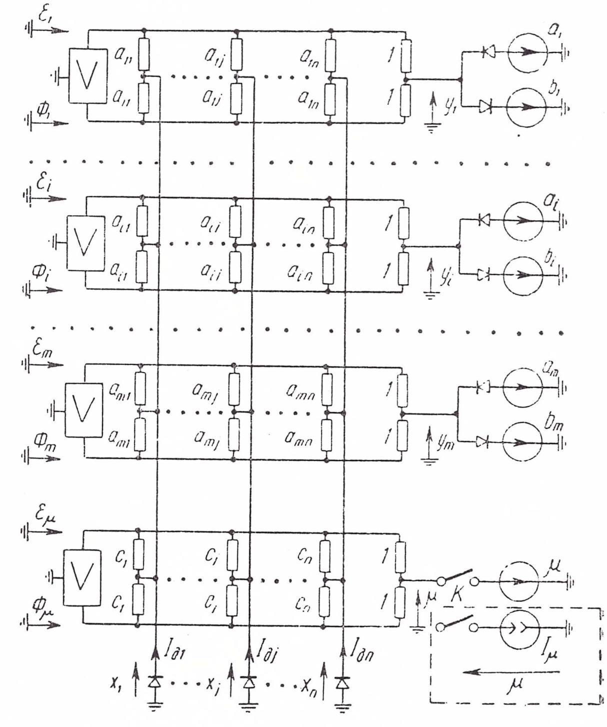

1. Берж К. Теория графов и ее применение. ИЛ, М., 1962.
2. Деннис Дж. Б. Математическое программирование и электрические цепи. ИЛ, М., 1961.
3. Пухов Г. Е. Избранные вопросы теории математических машин. Изд-во АН УССР, К., 1964.


Доложено на семинаре
10 июня 1966 г.

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ДВУХСТОРОННИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ОБРАТИМОМ ЛИНЕЙНОМ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕ

А. Н. КЛЕПИКОВА

Обратимый линейный преобразователь используется для решения систем линейных уравнений с любой неособенной матрицей коэффициентов [1]. С его помощью можно также решать задачи линейного программирования, линейные ограничения которых сформулированы в виде равенств. Методы получения оптимального значения целевой функции на такой модели описаны в работах [1, 2].



Если линейные ограничения заданы в виде двухсторонних неравенств, то количество аппаратуры, используемой в модели, значительно возрастает. При сведении ограничений к равенствам количество их увеличивается вдвое и на $2m$ возрастает количество неизвестных ($m$ — количество неравенств).

Применение диодных ограничителей позволяет моделировать ограничения непосредственно в виде неравенств и таким образом сократить количество аппаратуры.

Итак, нужно получить экстремальное значение целевой функции

$$\mu = c_1 x_1 + \ldots + c_j x_j + \ldots + c_n x_n$$

при ограничениях:

$$\begin{gathered} a_1 \leqslant a_{11} x_1 + \ldots + a_{1j} x_j + \ldots + a_{1n} x_n \leqslant b_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_i \leqslant a_{i1} x_1 + \ldots + a_{ij} x_j + \ldots + a_{in} x_n \leqslant b_i, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_m \leqslant a_{m1} x_1 + \ldots + a_{mj} x_j + \ldots + a_{mn} x_n \leqslant b_m, \\ x_j \geqslant 0. \end{gathered} \tag{1}$$

На рисунке представлена схема, включающая обратимый линейный преобразователь и диодные ограничители. Эта схема описывается следующими уравнениями:

$$\begin{gathered} -\varepsilon_1 \left(1 + \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\right) + \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j = 1 \cdot y_1, \quad a_1 \leqslant y_1 \leqslant b_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -\varepsilon_i \left(1 + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 1 \cdot y_i, \quad a_i \leqslant y_i \leqslant b_i, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -\varepsilon_m \left(1 + \sum_{j=1}^{n} a_{mj}\right) + \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j = 1 \cdot y_m, \quad a_m \leqslant y_m \leqslant b_m, \\ -\varepsilon_\mu \left(1 + \sum_{j=1}^{n} c_j\right) + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = 1 \cdot \mu, \\ -\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1} \varepsilon_i + c_1 \varepsilon_\mu\right) + 2\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1} + c_1\right) x_1 = \sum_{i=1}^{m} a_{i1} \Phi_i + c_1 \Phi_\mu - I_{\partial 1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \varepsilon_i + c_j \varepsilon_\mu\right) + 2\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} + c_j\right) x_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \Phi_i + c_j \Phi_\mu - I_{\partial j}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -\left(\sum_{i=1}^{m} a_{in} \varepsilon_i + c_n \varepsilon_\mu\right) + 2\left(\sum_{i=1}^{m} a_{in} + c_n\right) x_n = \sum_{i=1}^{m} a_{in} \Phi_i + c_n \Phi_\mu - I_{\partial n}, \end{gathered} \tag{2}$$

$$-k\varepsilon = \Phi,$$

$$x_j \geqslant 0,$$

$$I_{\partial j} \geqslant 0,$$

$$x_j I_{\partial j} = 0.$$

Здесь $\varepsilon_\mu$, $\varepsilon_i$ — напряжения на входах усилителей; $\Phi_\mu$, $\Phi_i$ — напряжения на выходах; $k$ — коэффициент усиления усилителя; $x_j$ — напряжения, моделирующие искомые переменные; $a_i$, $b_i$ — величины э. д. с., пропорциональные правым и левым частям неравенств; $\mu$ — напряжение, моделирующее величину целевой функции; $a_{ij}$, $c_j$, 1 — проводимости, пропорциональные коэффициентам.

При достаточно большом $k$ напряжения $\varepsilon$ равны нулю. Тогда система (2) запишется следующим образом:

$$a_1 \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \leqslant b_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$a_i \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$a_m \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j \leqslant b_m,$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \mu, \qquad (3)$$

$$2\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1} + c_1\right) x_1 = \sum_{i=1}^{m} a_{i1}\Phi_i + c_1\Phi_\mu - I_{\partial 1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$2\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} + c_j\right) x_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\Phi_i + c_j\Phi_\mu - I_{\partial j},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$2\left(\sum_{i=1}^{m} a_{in} + c_n\right) x_n = \sum_{i=1}^{m} a_{in}\Phi_i + c_n\Phi_\mu - I_{\partial n},$$

$$x_j \geqslant 0,$$

$$I_{\partial j} \geqslant 0, \quad x_j \cdot I_{\partial j} = 0.$$

При разомкнутом ключе К напряжения $x_j$ представляют собой допустимое решение задачи. Оптимальное решение можно получить,

применив либо метод регулируемого источника э. д. с. $\mu$ [1], либо метод включения источника тока $I_{\mu}$ [2] (на рисунке обведен пунктиром).

## ЛИТЕРАТУРА


1. Пухов Г. Е. Избранные вопросы теории математических машин. Изд-во АН УССР, К., 1964.
2. Васильев В. В., Клепикова А. Н.— В кн.: Математическое моделирование и электрические цепи. Вып. III. «Наукова думка», К., 1965.



Доложено на семинаре
10 июня 1966 г.

# ОПТИМАЛЬНЫЙ РАСЧЕТ НЕКОТОРЫХ ЛОГИЧЕСКИХ СХЕМ НА МОДЕЛЯХ

Ю. О. ЧЕРНЫШЕВ

Одной из задач надежностного синтеза автоматов является синтез элементов схемы [1]. При этом подразумевается нахождение оптимальных величин параметров, обеспечивающих безотказную работу устройства в течение определенного промежутка времени при «наихудших условиях работы». Расчет производится так, чтобы схема продолжала работать при одновременных максимально допустимых отклонениях питающих напряжений, а также активных и пассивных компонент схемы, стремящихся сделать ее неработоспособной [2, 3].

Существующие методы расчета схем [1—3], хотя и учитывают условия наихудшей работы, однако не позволяют выбирать оптимальные значения параметров, так как не принимают во внимание наиболее важные характеристики функционирования схем. Поэтому для оптимального синтеза необходимо вводить определенный критерий оптимальности, который учитывал бы наиболее характерный (или желаемый) критерий работы схемы [7]. В качестве последнего в одних случаях можно выбрать максимальную (минимальную) мощность, потребляемую схемой, в других — оптимальную величину времени переключения или помехоустойчивости и т. п. Поэтому, вероятно, значения выбираемых параметров при различных критериях будут различными.

В работах [4—6] выбор оптимальных параметров производится на цифровых вычислительных машинах (ЦВМ) статистическими методами [6] или методами линейного программирования [4, 5].

В работе [7] предлагается проводить оптимальный синтез логических схем методом линейного программирования на современных аналоговых машинах, разработанных в Институте кибернетики АН УССР под руководством Г. Е. Пухова [8].

В настоящей работе на указанных моделях проводится оптимальный выбор параметров делителя напряжения и логической схемы «Нет». Исходя из законов анализа цепей с учетом наихудшего соче-

тания параметров, составляются уравнения, описывающие функционирование указанных схем. В качестве критерия оптимальности выбрана мощность, рассеиваемая на сопротивлениях схемы. Согласно этапам [7] составляются уравнения, которые описывают работу схемы и записываются в форме, удобной для применения методов линейного программирования. Система уравнений рашается безытерационным методом на ρ-аналоговой моделирующей машине [9]. Результаты решения сравниваются с результатами, полученными на ЦВМ.

Расчет схемы заключается в нахождении оптимального решения определенной группы уравнений, описывающих ее работу. Если эти уравнения линейны и подлежащий оптимизации критерий в отношении неизвестных величин тоже линеен, то для синтеза схемы можно использовать методы линейного программирования. Если же искомый критерий или одно из уравнений, описывающих работу схемы, нелинейно, то следует применять методы нелинейного программирования. К сожалению, общих нелинейных методов, аналогичных симплексному, в настоящее время нет [4]. Поэтому желательно свести задачу нелинейного программирования к задаче линейного программирования, проведя некоторые упрощения и аппроксимации. Для этого предлагается следующее:

1. При записи уравнений, описывающих работу схемы, предполагать, что транзистор и диоды являются линейными элементами, параметры которых не зависят от положения рабочей точки.

2. Применять усредненные значения величин токов, зарядов и других параметров.

3. Логарифмические экспоненциальные и другие зависимости, встречающиеся в уравнениях, разлагать и линеаризовать при условии, что вносимые при этом погрешности лежат в определенных пределах, не превышающих точность искомых величин. Так, например:

$$e^x \approx 1 + x \text{ в пределах } 5\%, \text{ если } x \leqslant 0{,}1;$$

$$\ln(1 - \lambda) \approx -\lambda \text{ в пределах } 5\%, \text{ если } \lambda \leqslant 0{,}1;$$

$$\sin y \approx y \text{ в пределах } 5\%, \text{ если } y \leqslant 0{,}55.$$

4. Считать, что каждый из составляющих периодов, образующих временные интервалы, является линейным в отношении какого-то отдельного (а не общего для всех периодов) параметра или в отношении функций отдельных составляющих параметров.

Такие упрощения снижают точность решения, однако они позволяют решать задачу оптимального расчета схем, не прибегая к громоздким нелинейным программам, и выражать условия работы схемы в линейной форме. Указанные упрощения и аппроксимации при расчете логической схемы «Нет» будут иметься в виду. В качестве основы расчета при этом принимается модель транзистора, предложенного Эберсом и Моллом [10].

## Выбор оптимальных параметров делителя напряжения

Проведем оптимальный выбор параметров делителя напряжения, представленного на рис. 1. Вывод уравнений, описывающих работу делителя в наихудших условиях, сделаем методом линейного программирования согласно этапам, изложенным в работе [7].

1. Для расчета необходимо задать следующие параметры:

величина напряжения на полюсе *1* $U_1 = 18$ *в*;

величина напряжения на полюсе *2* $U_2 = -28$ *в*;

выходное напряжение на полюсе *3* должно изменяться в пределах от $U_{вых_1} = 2$ *в* до $U_{вых_2} = 6$ *в*;

величина выходного тока должна изменяться в пределах от $-0,1$ *ма* до $0,2$ *ма*;

допустимое отклонение величины напряжения питания должно составлять $\pm 5\%$.

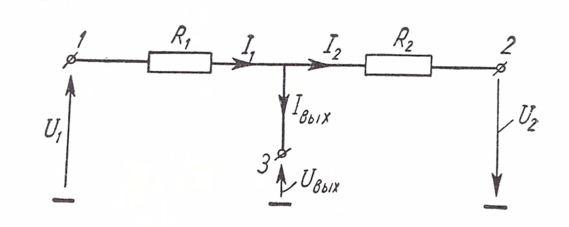



Рис. 1.

2. Необходимо определить оптимальные величины сопротивлений делителя при возможном отклонении их величин не более чем на $\pm 5\%$ от номинального. При этом мощность, рассеиваемая на делителе, должна быть минимальной.

3. Из физических соображений работы схемы необходимо чтобы:

а) минимальное выходное напряжение было больше наименьшего предельно заданного, т. е.

$$U_{вых.\,мин} \geqslant U_{вых_1}; \qquad (1)$$

б) максимальное выходное напряжение было меньше наибольшего предельно заданного:

$$U_{вых.\,макс} \leqslant U_{вых_2}. \qquad (2)$$

4. На основании законов анализа цепей составить основные уравнения, описывающие работу схемы:

$$U_2 = I_2 R_2 - U_{вых}, \qquad (3)$$

$$U_2 = I_2 R_2 + I_1 R_1 - U_1, \qquad (4)$$

$$I_{вых} = I_1 - I_2. \qquad (5)$$

После совместного решения уравнений (3)—(5) величина выходного напряжения определится так:

$$U_{вых} = \frac{U_1/R_1 - U_2/R_2 - I_{вых}}{1/R_1 + 1/R_2}. \qquad (6)$$

5. Исходя из принципа наихудшего условия работы схемы (3), ввести предельные значения параметров в уравнение схемы *:

$$U_{\text{вых}} = \frac{\underline{U}_1/\overline{R}_1 - \underline{U}_2/\underline{R}_2 - \overline{I}_{\text{вых}}}{1/\overline{R}_1 + 1/\underline{R}_2}, \tag{7}$$

$$U_{\text{вых}} = \frac{\overline{U}_1/\underline{R}_1 - \overline{U}_2/\overline{R}_2 - \underline{I}_{\text{вых}}}{1/\underline{R}_1 + 1/\overline{R}_2}. \tag{8}$$

6. Условия работы схемы п. 3 с учетом наихудшего сочетания параметров запишутся:

$$\frac{U_1/\overline{R}_1 - \underline{U}_2/\underline{R}_2 - \overline{I}_{\text{вых}}}{1/\overline{R}_1 + 1/\underline{R}_2} \geqslant U_{\text{вых}_1}; \tag{9}$$

$$\frac{U_1/\overline{R}_1 - \overline{U}_2/\overline{R}_2 - I_{\text{вых}}}{1/\underline{R}_1 + 1/\overline{R}_2} \leqslant U_{\text{вых}_2}. \tag{10}$$

7. 8. В качестве критерия оптимальности задана минимальная мощность, которая рассеивается на делителе и определится с учетом наихудшего сочетания параметров схемы следующим образом:

$$P_{\text{макс}} = \frac{(\overline{U}_1 - \overline{U}_{\text{ьых}})^2}{\underline{R}_1} + \frac{(\overline{U}_{\text{вых}} + \overline{U}_2)^2}{\underline{R}_2}. \tag{11}$$

9. После преобразований уравнений (9)—(10) окончательная система неравенств, пригодная для применения методов линейного программирования, может быть записана:

$$\begin{aligned} &\underline{X}_1 [\underline{U}_1 - U_{\text{вых}_1}] + \overline{X}_2 [-\underline{U}_2 - U_{\text{вых}_1}] \geqslant \overline{I}_{\text{вых}}, \\ &\overline{X}_1 [\overline{U}_1 - U_{\text{вых}2}] + \underline{X}_2 [-\underline{U}_2 - U_{\text{вых}_2}] \leqslant \underline{I}_{\text{вых}} \end{aligned} \tag{12}$$

при минимальной мощности $P$:

$$P = (\overline{U}_1 - \overline{U}_{\text{вых}})^2 \overline{X}_1 + (\overline{U}_{\text{вых}} + \overline{U}_2)^2 \overline{X}_2, \tag{13}$$

где

$$X_1 = \frac{1}{R_1}, \quad X_2 = \frac{1}{R_2}.$$

10. Подставляя значения номиналов в систему полученных неравенств и уравнение критерия оптимальности, получим:

$$\begin{aligned} &15{,}1X_1 - 28{,}6X_2 \geqslant 0{,}2, \\ &12{,}9X_1 - 23{,}4X_2 \leqslant -0{,}1 \end{aligned} \tag{14}$$

при минимальной

$$P = 169X_1 + 1253{,}16X_2.$$

---

* Здесь и дальше в уравнениях схемы минимальные значения величин отмечаются чертой под параметром, а максимальным — чертой над параметром.

11. Систему неравенств п. 10 легко решить одним из методов линейного программирования [4] вручную.

Цель настоящей работы — показать на простых примерах расчета схем решение полученных систем уравнений на ρ-аналоговой моделирующей установке [8]. Принципиальная схема ρ-модели для решения полученной системы представлена на рис. 2. Работа схемы довольно подробно описана в книге [8]. Поэтому только напомним, что в данной схеме в пунктирном контуре заключены: обратимый линейный преобразователь; диоды и источники, моделирующие соответственно неравенства и правые части (9), а также проводимости, которые являются коэффициентами при неизвестных. Диоды за пунктирным контуром выполняют условие неотрицательности неизвестных $X_1$, $X_2$, а источник тока предназначен для принудительного изменения критерия оптимальности $P$.

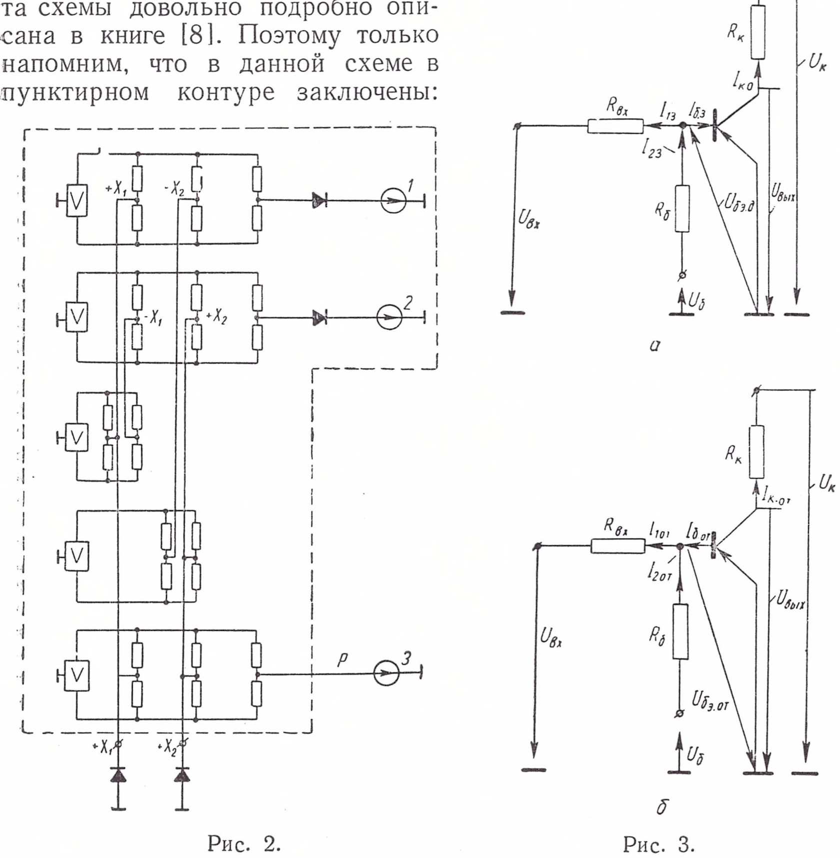



Рис. 2.

Рис. 3.

Решение системы на модели проводится безытерационным методом в два шага: 1) устанавливаются величины коэффициентов при

неизвестных, величины э. д. с., соответствующие правым частям неизвестных, и получается допустимое решение; 2) принудительно изменяется критерий оптимальности $P$ (э. д. с.$_3$) до получения решения.

Таблица 1

| Искомые величины | $x_1 \cdot 10^{-3}$, *мо* | $x_2 \cdot 10^{-3}$, *мо* | $R_1 \cdot 10^3$, *ом* | $R_2 \cdot 10^3$, *ом* | $P$, *вт* |
|---|---|---|---|---|---|
| Данные расчета на ЦВМ | 0,202 | 0,0905 | 4,97 | 11,05 | 115 |
| Данные расчета на модели | 0,195 | 0,0876 | 5,14 | 11,42 | 110,5 |
| Величина погрешности | 3,5% | 3% | 3% | 3,1% | 3,2% |

Данные, полученные на ЦВМ [6] для аналогичной цепи и на модели, приведены в табл. 1. Они показывают, что погрешность решения на модели составляет приблизительно 3%, которая вполне приемлема для инженерной практики.

## Выбор оптимальных параметров логической схемы «Нет»

Выбор оптимальных параметров проведем для схемы, представленной на рис. 3. Данные, необходимые для расчета схемы, такие:

$$\underline{U}_{бэз} = 0{,}15 \text{ в}, \qquad \bar{\beta} = 60,$$
$$\underline{U}_{бэз} = 0{,}1 \text{ в}, \qquad \underline{\beta} = 20,$$
$$\underline{U}_{к} = 13{,}5 \text{ в}, \qquad C_{вх} = 20 \text{ ммк},$$
$$\bar{U}_{к} = -16{,}5 \text{ в}, \qquad \bar{C}_{п} = 10 \text{ ммк},$$
$$\underline{U}_{б} = 13{,}5 \text{ в}, \qquad \bar{\tau}_{\beta} = 1 \text{ мксек},$$
$$\bar{U}_{г} = 16{,}5 \text{ в}, \qquad \underline{t}_{1\,зад} = 35 \text{ мксек},$$
$$\underline{U}_{вх} = -20 \text{ в}, \qquad \underline{t}_{2н} = 4 \text{ мксек},$$
$$\bar{I}_{к0} = 2 \times 10 \text{ а}, \qquad \underline{t}_{3р} = 1{,}5 \text{ мксек},$$
$$\bar{U}_{бэ\,от} = 0{,}15 \text{ в}, \qquad \underline{t}_{4с} = 2 \text{ мксек}.$$

Допуск на $R_{вх}$ $\pm 5\%$, допуск на $R_к$, $R_б = \pm 10\%$, допуск на $U_к$ $\pm 10\%$, допуск на $U_б$ $\pm 10\%$.

Известно, что логическая операция «Нет» — отрицание — реализуется следующим образом:

| $U_{вх}$ | $U_{вых}$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 . |

В связи с этим схема, реализующая данную операцию, должна находиться в двух состояниях:

1) входной сигнал отсутствует ($U_{вх} = 0$), триод заперт — на выходе имеется сигнал $U_{вых} = 1$;

2) входной сигнал имеется ($U_{вх} = 1$), триод открыт, на выходе сигнал отсутствует ($U_{вых} = 0$). Схема, соответствующая первому состоянию, дана на рис. 3, *а*, а второму — на рис. 3, *б*.

Исходя из физических соображений, схема может работать при выполнении следующих условий:

1. Схема надежно закрыта, если минимальная величина тока базы $\underline{I}_{б.з}$ больше максимального значения тока коллектора $\bar{I}_{к0}$ закрытого триода, т. е. $\underline{I}_{б.з} \geqslant \bar{I}_{к0}$.

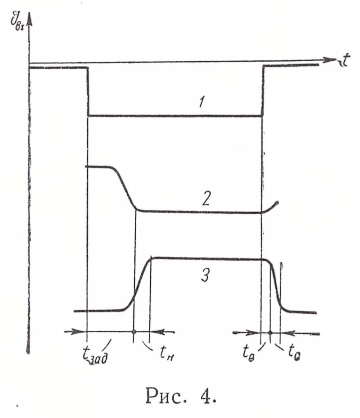


Рис. 4.

2. Схема надежно открыта, если минимальная величина тока базы $I_{б.от}$ больше или равна максимальной величине тока.

Очевидно, что кроме этих условий существуют требования к включению и выключению триода. Поэтому необходимо чтобы (рис. 4, где *1* — входной сигнал; *2* — напряжение на базе триода; *3* — напряжение на коллекторе):

3. Время задержки сигнала $\underline{t}_{зад}$ при открывании триода было бы меньше или равно заданному $\underline{t}_{1зад}$:

$$\underline{t}_{зад} \leqslant \underline{t}_{1\,зад}\,. \tag{15}$$

4. Время нарастания выходного сигнала $\underline{t}_н$ было не больше заданного $\underline{t}_{2н}$:

$$\underline{t}_н \leqslant \underline{t}_{2н}\,. \tag{16}$$

5. Время рассасывания избыточного заряда неосновных носителей $\underline{t}_р$ было меньше или равно заданному $\underline{t}_{3р}$:

$$\underline{t}_р \leqslant \underline{t}_{3р}\,. \tag{17}$$

6. Время спада выходного сигнала $\underline{t}_с$ было не больше заданного $\underline{t}_{4с}$:

$$\underline{t}_с \leqslant \underline{t}_{4с}\,. \tag{18}$$

После записи условий работы схемы на основании законов анализа цепей и физических процессов, происходящих в схеме, составляем уравнения, описывающие работу схемы.

1. Состояние закрытого триода (см. рис. 2):

$$I_{б.з} = I_{2з} - I_{1з} \tag{19}$$

или

$$I_{б.з} = \frac{U_б - U_{б.э.з}}{R_б} - \frac{-U_{б.э.з}}{R_{вх}},$$

где $U_{б.э.з}$ — напряжение база — эмиттер закрытого триода; $I_{к0}$ — ток утечки в базе триода; $U_б$ — напряжение базового смещения; $R_{вх}$ — сопротивление источника входного сигнала; $R_б$ — сопротивление смещения в цепи базы.

2. Состояние открытого триода (см. рис. 3):

$$I_{б.от} = I_{1\,от} - I_{2\,от}, \tag{20}$$

или

$$I_{б.от} = \frac{-U_{вх} - U_{б.э.от}}{R_{вх}} - \frac{U_б + U_{б.э.от}}{R_б},$$

где $U_{вх}$ — напряжение на входе схемы; $U_{б.э.от}$ — напряжение база — эмиттер открытого триода; $U_к$ — напряжение на коллекторе схемы; $R_к$ — сопротивление в коллекторной цепи; $I_{б.от}$ — ток через базу открытого триода.

3. Время задержки сигнала можно определить [2, 4] так:

$$t_{зад} \simeq C_{вх} \cdot \frac{U_{б.э.з} - U_{б.э.отп}}{I_{б.от}}, \tag{21}$$

где $C_{вх}$ — среднее значение входной емкости схемы в закрытом состоянии; $U_{б.э.отп}$ — напряжение отпирания триода.

Подставляя значения базового тока открытого триода из п. 2, можно записать

$$t_{зад} \approx C_{вх} \frac{U_{б.э.з} - U_{б.э.отп}}{I_{б.от}}. \tag{22}$$

4. Время нарастания входного сигнала определится [2, 3] так:

$$t_н = \tau_\beta \ln \frac{\beta I_{б.от} + 0{,}1 I_{к.от}}{\beta I_{б.от} + 0{,}9 I_{к.от}}, \tag{23}$$

где $\tau_\beta$ — постоянная времени нарастания тока коллектора; $\beta$ — коэффициент усиления по току; $I$ — ток коллектора открытого триода (ток насыщения).

Подставляя значения $I_{к.от}$ и $I_{б.от}$ в $t_н$, получим:

$$t_н = \tau_\beta \ln \frac{\beta\left(\frac{-U_{вх} - U_{б.э.от}}{R_{вх}} - \frac{U_б + U_{б.э.от}}{R_б}\right) + 0{,}1\frac{U_к}{I_к}}{\beta\left(\frac{-U_{вх} - U_{б.э.от}}{R_{вх}} - \frac{U_б + U_{б.э.от}}{R_б}\right) + 0{,}9\frac{U_к}{I_к}}. \tag{24}$$

5. Время рассасывания равно [2, 4]:

$$t_р \approx C_{вх} \frac{U_{б.э.з} - U_{б.э.от}}{I_{б.з}}. \tag{25}$$

Подставляя значения для тока $I_{б.з}$ из п. 1, получим

$$\underline{t}_р \approx C_{вх} \frac{U_{б.э.з} - U_{б.э.от}}{-\frac{U_{б.э.з}}{R_{вх}} + \frac{U_б - U_{б.э.з}}{R_б}}.$$

6. Время спада определится [2, 3] так:

$$\underline{t}_с = \tau_\beta \ln \frac{\beta I_{б.з} + I_{к.от}}{\beta I_{б.з} + 0{,}1 I_{к.от}}. \quad (26)$$

Подставляя выражения для токов $I_{б.з}$ и $I_{к.от}$, получим

$$\underline{t}_с = \tau_\beta \ln \frac{\beta\left(-\frac{U_{в.э.з}}{R_{вх}} + \frac{U_б - U_{б.э.з}}{R_б}\right) + \frac{U_к}{R_к}}{\beta\left(-\frac{U_{б.э.з}}{R_{вх}} + \frac{U_б - U_{б.э.з}}{R_б}\right) + 0{,}1\frac{U_к}{R_к}}.$$

Учитывая условия наихудшего сочетания параметров схемы [2, 3] и ограничения работы схемы, введенные выше, запишем формулы п. 1—6 следующим образом:

1. $$\frac{-\bar{U}_{б.э.з}}{\underline{R}_{вх}} + \frac{\underline{U}_б - \bar{U}_{б.э.з}}{\bar{R}_б} \geqslant \bar{I}_{к.0}. \quad (27)$$

2. $$\frac{\bar{I}_{к.от}}{\underline{I}_{б.от}} \leqslant \underline{\beta}, \quad (28)$$

$$\frac{\frac{\underline{U}_к}{\bar{R}_к}}{\frac{-U_{вх} - \bar{U}_{б.э.от}}{\bar{R}_{вх}} - \frac{\bar{U}_б + \bar{U}_{б.э.от}}{\underline{R}_б}} \leqslant \underline{\beta}.$$

3. $$C_{вх.ср} \frac{\bar{U}_{б.э.з} - \bar{U}_{б.э.от}}{\frac{-U_{вх} - \bar{U}_{б.э.от}}{\bar{R}_{вх}} - \frac{\bar{U}_б + \bar{U}_{б.э.от}}{\underline{R}_б}} \leqslant \underline{t}_{1\,зад}. \quad (29)$$

4. $$\bar{\tau}_\beta \ln \frac{\beta\left(\frac{-U_{вх} - \bar{U}_{б.э.от}}{\bar{R}_{вх}} - \frac{\bar{U}_б + \bar{U}_{б.э.от}}{\underline{R}_б}\right) + 0{,}1\frac{\underline{U}_к}{\bar{R}_к}}{\beta\left(\frac{-U_{вх} - \bar{U}_{б.э.от}}{\bar{R}_{вх}} - \frac{\bar{U}_б + \bar{U}_{б.э.от}}{\underline{R}_б}\right) + 0{,}9\frac{\underline{U}_к}{\bar{R}_к}} \leqslant \underline{t}_{2н}. \quad (30)$$

5. $$\frac{\bar{U}_{б.э.з} - \bar{U}_{б.э.от}}{\frac{-\bar{U}_{б.э.з}}{\underline{R}_{вх}} + \frac{\underline{U}_б - \bar{U}_{б.э.з}}{\bar{R}_б}} \leqslant \underline{t}_{з.р}. \quad (31)$$

6. $$\bar{\tau}_\beta \ln \frac{\beta\left(-\frac{\bar{U}_{б.э.з}}{\underline{R}_{вх}} + \frac{\underline{U}_б - \bar{U}_{б.э.з}}{\bar{R}_б}\right) + \frac{\underline{U}_к}{\bar{R}_к}}{\underline{\beta}\left(-\frac{\bar{U}_{б.э.з}}{\underline{R}_{вх}} + \frac{\underline{U}_б - \bar{U}_{б.э.з}}{\bar{R}_б}\right) + 0{,}1\frac{\underline{U}_к}{\bar{R}_к}} \leqslant \underline{t}_{4с}. \quad (32)$$

В качестве критерия оптимальности задана мощность, рассеиваемая на сопротивлениях схемы (величиной мощности, рассеиваемой на транзисторе, пренебрегаем):

$$\overline{P}_{\text{ср}} \approx \left( \frac{\overline{U}_{\text{к}}^2}{R_{\text{к}}} + \frac{\overline{U}_{\text{б}}^2}{R_{\text{б}}} + \frac{\overline{U}_{\text{вх}}^2}{R_{\text{вх}}} \right). \tag{33}$$

Введя обозначения $X_1 = \frac{1}{R_{\text{вх}}}$; $X_2 = \frac{1}{R_{\text{б}}}$; $X_3 = \frac{1}{R_{\text{к}}}$ и подставляя значения известных параметров (согласно данным, необходимым для расчета схемы, стр. 171) в уравнения п. 1—6 и уравнение критерия оптимальности (при этом учитывая введенные выше аппроксимации), получим линейную систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} 0{,}11X_1 - 0{,}02X_2 &\geqslant 0{,}002, \\ 398X_1 - 360X_2 + 13{,}5X_3 &\geqslant 0, \\ 694X_1 - 619X_2 &\geqslant -0{,}001, \\ 1189X_1 - 1080X_2 - 3{,}53X_3 &\geqslant 0, \\ 0{,}15X_1 - 20{,}03X_2 &\geqslant -0{,}001, \\ 1{,}8X_1 - 13{,}25X_2 - 10{,}8X_3 &\leqslant 0, \end{aligned} \tag{34}$$

при

$$\min P_{\text{ср}} \to P = 400X_1 + 273X_2 + 273X_3.$$

Точность аппроксимации лежит в пределах 5—6%, что вполне допустимо [12]. Данную систему уравнений можно решить одним из методов линейного программирования на цифровой вычислительной машине. Однако нам представляется более целесообразным решать эту и аналогичные задачи на ρ-аналоговых моделях [8].

Задачи на ρ-аналоге можно решать методом, подобным симплексному, однако для получения более быстрого решения мы применили, как и при расчете делителя, безытерационный метод [9]. Преимущество последнего состоит в высокой скорости сходимости процесса при малом числе шагов.

Данные полученные на ЦВМ и ρ-аналоговой машине, приведены в табл. 2.

Таблица 2

| Искомая величина | $x_1 \cdot 10^{-3}$, *мо* | $x_2 \cdot 10^{-3}$, *мо* | $x_3 \cdot 10^{-3}$, *мо* | $P \times 10^{-3}$ | $R_1 \cdot 10^3$ *ом* | $R_2 \cdot 10^3$ *ом* | $R_3 \cdot 10^3$ *ом* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Расчет на ЦВМ | 0,799 | 0,314 | 2,73 | 1,15 | 1,25 | 3,18 | 0,366 |
| Расчет на модели | 0,868 | 0,292 | 2,97 | 1,96 | 1,15 | 3,43 | 0,336 |
| Погрешность в % | 9 | 8,2 | 8 | 8,6 | 9 | 8,4 | 8,3 |

Из сравнения данных табл. 2 видно, что погрешность полученных результатов составляет около 9%. В работе [12] показано, что

при проектировании схем цифровых вычислительных устройств точность порядка 10—15% вполне приемлема. Ориентируясь на эту работу, а также и на другие источники, подтверждающие практическую приемлемость указанной точности, можно заключить, что выбор оптимальных параметров логической схемы «Нет», проведенный на ρ-аналоговой модели при точности порядка 9% вполне приемлем для инженерной практики. При этом основными достоинствами решения подобных задач на модели являются:

1) простота схемы моделирующей установки — отсюда надежность ее работы;

2) возможность непосредственного набора системы неравенств на модели (без предварительного сведения их к равенствам);

3) использование безытерационного метода решения задачи, что позволяет решать ее практически мгновенно;

4) достаточная для инженерных расчетов точность получаемых результатов.

Учитывая сказанное, необходимо сделать вывод, что квазианалоговые моделирующие машины целесообразно применять для решения подобных задач. При этом очевидно их явное преимущество перед цифровыми машинами, так как для работы на ЦВМ требуются квалифицированные специалисты-математики для составления программы решения задачи; требуется определенное время для отладки программы на машине, а также время для решения и расшифровки данных.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Иванова О. И., Лазарев В. Г., Пийль Е. И. Синтез электронных схем дискретного действия. «Связь», М., 1964.

2. Прессман А. И. Расчет и проектирование схем на полупроводниковых приборах для цифровых вычислительных машин. ИЛ, М., 1963.

3. Будинский Я. Транзисторные переключающие схемы. «Связь», М., 1965.

4. Goldstick G. H. and Mackie D. G. — ARE lutern. Consent. Record, 1961, 2, 224—240.

5. Адонин Л. Ф. и др. — В кн.: Тезисы докладов и сообщений XX Всесоюзной научной сессии, посвященной Дню радио, «Советское радио», М., 1964, стр. 27—28.

6. Clunics Ross C. and Husson S. S.— Proc. of the National Electr. Conference, Chicago, 1962, 8, 23, 1523.

7. Чернышев Ю. О.— В кн.: Труды конференции «Методы автоматических измерений параметров полупроводниковых приборов». Рига, Институт электроники и вычислительной техники АН ЛатвССР, 1966.

8. Пухов Г. Е. Избранные вопросы теории математических машин. Изд-во АН УССР, К., 1964.

9. Клепикова А. Н. — Настоящий сборник, 162.

10. Эберс и Молл. Радиоэлектроника за рубежом, 1963, 3, 13—14.

11. Гасс С. Линейное программирование, ИЛ, М., 1961.

12. Норенков И. П. Автореферат кандидатской диссертации. М., 1965.

Доложено на семинаре
6 мая 1966 г.

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ К ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ЭКВИВАЛЕНТНОГО МНОГОПОЛЮСНИКА

В. К. БЕЗРУКОВ

В практике эксплуатации радиоэлектронных схем иногда возникает необходимость замера параметров схем — коэффициентов усиления, крутизны ламп, величины сопротивлений и т. д. Эта

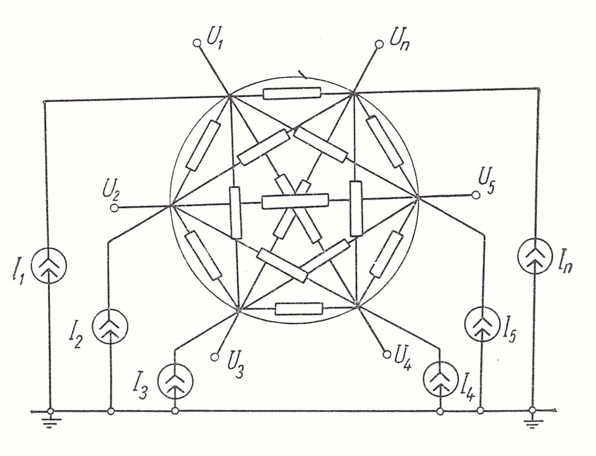



Рис. 1.

задача решается в настоящее время методами активного эксперимента, например холостого хода и короткого замыкания [1]. В настоящей работе предлагается метод пассивного эксперимента, позволяющий определить параметры электрической схемы по параметрам нормальных режимов. Согласно этому методу, любая электрическая цепь представляется в виде эквивалентного пассивного многополюсника (М), к узлам которого подключены эквивалентные источники

тока (рис. 1). Уравнение такого многополюсника в матричной форме имеет вид

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline u_1 & \dots & u_n \\ \hline\end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline -y_{11} & \dots & y_{1k} & \dots & y_{1n} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline y_{k1} & \dots & -y_{kk} & \dots & y_{kn} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline y_{n1} & \dots & y_{nk} & \dots & -y_{nn} \\ \hline\end{array} +$$

$$+ \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline j_1 & \dots & j_k & \dots & j_n \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline I_1 & \dots & -I_k & \dots & -I_n \\ \hline\end{array}, \quad (1)$$

где $U$ — матрица напряжений узлов, отсчитываемых относительно внешнего базисного узла; $J$ — матрица источников тока; $I$ — матрица внешних токов, притекающих к узлу; $Y$ — матрица связей между узлами $M$, имеющая размерность проводимости. Матрица $Y$ особая, так как сумма элементов каждой строки тождественно равна нулю.

Уравнение (1) можно записать иначе:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline u_1 & \dots & u_n & 1 \\ \hline\end{array} \cdot \begin{array}{|c|}\hline \mathbf{Y} \\ \hline I \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline -I_1 & \dots & -I_n \\ \hline\end{array}. \quad (2)$$

Матрицы $U$ и $I$ характеризуют только один режим работы схемы. Меняя напряжения узлов, можно получить $n$ различных режимов. Можно записать все эти режимы и условие особенности матрицы $Y$ в виде одного матричного уравнения

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \\ \hline u_1' & \dots & \dots & u_n' & 1 \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline \dots & \dots, & \dots & \dots & \dots \\ \hline u_1^n & \dots & \dots & u_n^n & 1 \\ \hline\end{array} \cdot \begin{array}{|c|}\hline \mathbf{Y} \\ \hline I \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & \dots & \dots & 0 \\ \hline I_1' & \dots & \dots & I_n' \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline I_1^n & \dots & \dots & I_n^n \\ \hline\end{array}, \quad (3)$$

где верхние индексы указывают на условный номер режима. Это уравнение можно записать проще

$$\boldsymbol{UY} = \boldsymbol{I},$$

где под $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{Y}$ и $\boldsymbol{I}$ понимаются матрицы формулы (3). Решение этого уравнения относительно эквивалентных параметров имеет вид

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{I}.$$

Для пассивных электрических цепей последняя строка матрицы $\boldsymbol{Y}$ нулевая.

В частном случае, когда матрица $\boldsymbol{U}$ диагональная, уравнение (3) представляет собой матричную форму записи метода холостого хода и короткого замыкания. В дальнейшем совокупность векторов $(u_1^i\, u_2^i \ldots u_n^i)$ и $(I_1^i\, I_2^i \ldots I_n^i)$ будем называть выборкой $i$, а количество наблюдений (режимов) — объемом выборки $(m)$. Из формулы (3) видно, что увеличение числа полюсов, эквивалентного $M$, требует пропорционального увеличения объема выборки. В то же время известно, что число связей, сходящихся в узле, в реальных схемах сравнительно мало́ и редко превышает 4—5. Это значит, что в каждом столбце матрицы $\boldsymbol{Y}$ всего 4—5 ненулевых элементов. Как будет показано ниже, это позволяет находить матрицу $\boldsymbol{Y}$ при весьма малом объеме выборки. Рассмотрим следующую вспомогательную задачу.

Дано уравнение

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}, \tag{6}$$

матрица $\boldsymbol{A}$ — квадратная, неособая. Решение уравнения (6) $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ удовлетворяет следующим условиям:

1) вектор $\boldsymbol{X}$ имеет только $r$ ненулевых компонент $(r < n)$;

2) ненулевые компоненты положительны.

Матрицей $\boldsymbol{A}_{mn}$ будем называть матрицу, состоящую из $m$ строк матрицы $\boldsymbol{A}$, а $\boldsymbol{B}_m$ из $m$ элементов матрицы $\boldsymbol{B}$ $(m < n)$. Учитывая особенности вектора $\boldsymbol{X}$ найти такой метод решения уравнения

$$\boldsymbol{A}_{mn}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}_m, \tag{7}$$

который бы обеспечивал решение, тождественное решению уравнения (6).

Уравнения с прямоугольной матрицей коэффициентов называются неопределенными. Решаются такие системы уравнений методами линейного программирования [2]: приводятся к определенным системам, содержащим столько неизвестных, сколько и уравнений, т. е. соответствующее число переменных приравнивается нулю. Из всех возможных решений отыскивается только одно неотрицательное решение, при котором достигается минимальное или максимальное значение некоторой функции, называемой линейной формой

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n,$$

где $c$ — постоянные коэффициенты. Вспомогательную задачу можно решить методами линейного программирования при условии задания

линейной формы, минимум или максимум которой будут каким-то образом связаны с решением системы (6).

Зададим линейную форму

$$F = \pm (x_1 + x_2 + \ldots + x_n),$$

что обеспечивает получение двух решений, одно из которых отвечает наименьшему значению $F$, а другое максимальному. Пусть в уравнении (7) $m = m_1$. Решениям этой системы отвечают $F_{1\text{макс}}$ и $F_{1\text{мин}}$. Если к матрице $\boldsymbol{A}_{m1,\,n}$ добавить одну строку, $m = m_2 = m_1 + 1$, то новые решения обеспечивают $F_{2\text{макс}}$ и $F_{2\text{мин}}$.

Поскольку новая система включает в себя старую, а дополнительное уравнение (если оно не является линейной комбинацией старых) накладывает дополнительные ограничения на переменные, то можно утверждать, что

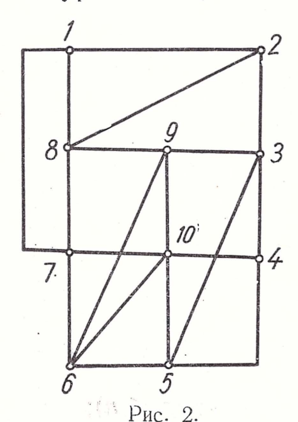


Рис. 2.

$$F_{2\text{ макс}} \leqslant F_{1\text{ макс}}, \quad F_{2\text{ мин}} \geqslant F_{1\text{ мин}}, \tag{8}$$

т. е. диапазон изменения линейной формы может только сужаться. При $m = n$ решение системы (6) единственно, следовательно

$$F_{m\text{ макс}} = F_{m\text{ мин}}. \tag{9}$$

Расчеты показали, что в большинстве случаев выполнение условия (9) обеспечивает тождественные решения уравнений (6) и (7) при $r \leqslant m < n$. Однако не исключена возможность появления конкурирующего решения (т. е. такого, которое удовлетворяет условию (9) и не тождественно решению уравнения (6)). Вероятность появления конкурирующего решения можно уменьшить и даже совсем исключить, если наложить более жесткие требования к выборкам (например, чтобы в матрице $\boldsymbol{A}$ не было одинаковых столбцов или их линейной комбинации).

Очень важным является вопрос о скорости сходимости решения, которую можно оценивать величиной $\delta = \frac{n}{m}$. При $\delta > 2$ предлагаемую методику можно считать оправдывающей себя. Проделанные расчеты показали, что скорость сходимости зависит от количества новой информации в новой выборке. Если выборки мало отличаются друг от друга, то сходимость медленная.

Исходную задачу определения эквивалентных параметров $M$ можно легко свести к только что рассмотренной задаче, если принять, что вектор $\boldsymbol{X}$ — один из столбцоз матрицы $\boldsymbol{Y}$, а $\boldsymbol{B}$ — соответствующий столбец матрицы $\boldsymbol{I}$. В приложении рассматривается пример применения симплекс — метода к задаче определения параметров пассивного десятиполюсника. Расчеты проводились на ЭЦВМ БЭСМ-2 по стандартной программе [3]. Необходимо отметить, что

решение подобных задач требует большого времени счета. Поэтому представляет интерес использование квазианалоговых моделей для решения задач линейного программирования, предложенных Г. Е. Пуховым [4]. При этом получение решения существенно упрощается. Особый интерес такие модели могут представлять как специализированные устройства для контроля параметров объекта в процессе его нормальной работы.

Пример. Задан некоторый десятиполюсник, известны режимы работы всех узлов (токи и напряжения). После первой выборки можно записать для каждого узла следующее уравнение (например для 6-го):

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & -1 & \dots & 1 \\ u_1' & \dots & -u_6' & \dots & u_{10}' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_{16} \\ \dots \\ y_{66} \\ \dots \\ y_{10,6} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ I_6' \end{vmatrix}.$$

Знак (—) шестого столбца матрицы $U$ вызван тем, что необходимо убрать знак (—) у диагональных элементов матрицы $Y$ (1).

Линейная форма имеет вид

$$F_6 = \pm (y_{16} + y_{26} + \dots + y_{10,6}).$$

Получим некоторые решения, которым отвечают

$$F'_{6\,\text{мин}}, \; F'_{6\,\text{макс}}.$$

Решая соответствующее уравнение, для каждого узла проверяем выполнение условия (9). Если оно не выполняется, то производим новую выборку и запишем следующее уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & -1 & \dots & 1 \\ u_1' & \dots & -u_6' & \dots & u_{10}' \\ u_1^2 & \dots & -u_6^2 & \dots & u_{10}^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_{16} \\ \dots \\ y_{66} \\ \dots \\ y_{10,6} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ I_6' \\ I_6^2 \end{vmatrix}.$$

Линейная форма такая же.

Получим некоторые решения новой системы, которым отвечают $F^2_{6\text{мин}}$ и $F^2_{6\text{макс}}$.

Таблица 1

| № | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | $u_5$ | $u_6$ | $u_7$ | $u_8$ | $u_9$ | $u_{10}$ | $I_1$ | $I_2$ | $I_3$ | $I_4$ | $I_5$ | $I_6$ | $I_7$ | $I_8$ | $I_9$ | $I_{10}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 99 | 6,0 | 1,90 | 1,52 | 3,73 | 2,90 | 0,195 | 3,55 | —8,3 | —0,4 | —11,1 |
| 2 | 19 | 75 | 90 | 90 | 41 | 74 | 25 | 89 | 87 | 25 | 6,03 | 0,1 | —0,38 | —8,0 | 3,0 | —1,08 | 6,41 | —12 | —3,13 | 9,01 |
| 3 | 60 | 74 | 35 | 17 | 75 | 32 | 94 | 95 | 49 | 32 | 3,1 | —0,3 | —1,0 | 7,1 | —8,0 | —1,2 | —6,6 | —4,0 | —0,61 | 9,0 |
| 4 | 60 | 90 | 90 | 23 | 10 | 37 | 30 | 90 | 22 | 22 | 2,55 | —0,3 | —8,1 | 6,4 | 2,4 | —0,72 | 5,4 | —9,1 | 1,43 | 0,1 |
| 5 | 50 | 30 | 37 | 47 | 57 | 23 | 49 | 59 | 94 | 83 | 0,51 | +1,2 | +1,55 | 2,1 | 0,42 | 1,46 | 4,28 | —2,24 | —1,82 | —7,5 |
| 6 | 15 | 51 | 66 | 66 | 36 | 37 | 59 | 70 | 92 | 67 | 5,00 | 0,50 | —0,0 | —2,0 | 4,9 | 0,52 | 1,56 | —5,85 | —2,0 | —1,9 |

Таблица 2

| $F_1$ | | $F_2$ | | $F_3$ | | $F_4$ | | $F_5$ | | $F_6$ | | $F_7$ | | $F_8$ | | $F_9$ | | $F_{10}$ | | № |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| min | max | min | max | min | max | min | max | min | max | min | max | min | max | min | max | min | max | min | max | |
| 9,5 | 18,9 | 2,8 | 6 | 7,66 | 16,7 | 12 | 40 | 15,8 | ∞ | 2,2 | ∞ | 17,2 | 22 | 18,3 | 31,7 | 5,05 | 8,1 | 18,5 | 32,6 | 3 |
| 9,5 | 9,5 | 6 | 6 | 14,05 | 14,7 | 18,3 | 33,6 | 16,0 | 17,8 | 3,5 | ∞ | 20,3 | 21,7 | 19,2 | 23,7 | 7,18 | 7,5 | 26,6 | 30,1 | 4 |
| | | | | 14,1 | 14,25 | 19,2 | 27 | 16,1 | 16,1 | 3,5 | 3,5 | 20,4 | 21 | 20,5 | 22 | 7,5 | 7,5 | 27,9 | 29,8 | 5 |
| | | | | 14,1 | 14,1 | 20,1 | 25 | | | | | 21 | 21 | 22 | 22 | | | 28,7 | 29,5 | 6 |
| | | | | | | 25 | 25 | | | | | | | | | | | 29,5 | 29,5 | 7 |
| 9,5 | | 6 | | 14,1 | | 25 | | 16,1 | | 3,5 | | 21 | | 22 | | 7,5 | | 29,5 | | 10 |

**Промежуточное решение ($m = 5$)**

$F_{min} = (F_{1\,min}, F_{2\,min}, \ldots, F_{10\,min})$

Y =

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | —9,5 | 1 | | 1,66 | | | | 8,6 | | |
| 2 | 1 | —6 | 2 | 7,01 | | | | 1,5 | | |
| 3 | | 2 | —14,1 | 0,49 | 0,1 | | 0,76 | | 1 | |
| 4 | | | 11 | —19,2 | 7 | | | | | 0,55 |
| 5 | | | 0,1 | | —16,1 | 2 | | 1,52 | | 16,7 |
| 6 | | | | | 2 | —3,5 | | 0,44 | 0,5 | 4,8 |
| 7 | 0.5 | | | | | 0,5 | —20,35 | 8,4 | | |
| 8 | 8 | 3 | | 1,24 | | | 9,5 | —20,5 | 1 | 2,0 |
| 9 | | | 1 | | | 0,5 | | | —7,5 | 3,8 |
| 10 | | | | 8,78 | 7 | 0,5 | 10 | | 5 | —27,9 |

$F_{max} = (F_{1\,max}, F_{2\,max}, \ldots, F_{10\,max})$

Y =

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | —9 5 | 1 | | 6,05 | | | 0,5 | 8 | | 1,27 |
| 2 | 1 | —6 | 2,1 | | | | | 3 | | |
| 3 | | 2 | —14,25 | 4,62 | 0,1 | | | | 1 | |
| 4 | | | 11,07 | —27.05 | 7 | | | | | |
| 5 | | | | | —16 1 | 2 | | | | 12,5 |
| 6 | | | | 6,61 | 2 | —3,5 | 0,5 | | 0,5 | 5,71 |
| 7 | 0,5 | | | | | 0,5 | —21 | 10 | | 3,37 |
| 8 | 8 | 3 | | | | | 10 | —22 | 1 | |
| 9 | | | 1,01 | 6,06 | | 0,5 | | 1 | —7,5 | 6,9 |
| 10 | | | | 3,1 | 7 | 0,5 | 10 | | 5 | —29,8 |

Опять проверяем выполнение условия (9) для каждого узла. Если для какого-то узла оно выполняется, то полученное решение считаем решением исходной задачи и этот узел из дальнейших расчетов исключаем. Затем производится следующая выборка и последующее решение до тех пор пока все столбцы матрицы $Y$ не будут определены. Если матрица $Y$ симметричная, то можно существенно увеличить скорость сходимости решения. Ниже приведены таблицы выборок (табл. 1) линейной формы для узлов десятиполюсника (табл. 2), промежуточные вычисления для $m$-5 и конечный результат. Эквивалентная схема $M$ дана на рис. 2.

**Решение исходной задачи:**

$Y =$

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | —9,5 | 1 | | | | | 0,5 | 8 | | |
| 2 | 1 | —6 | 2 | | | | | 3 | | |
| 3 | | 2 | —14,1 | 11 | 0,1 | | | | 1 | |
| 4 | | | 11 | —25 | 7 | | | | | 7 |
| 5 | | | 0,1 | 7 | —16,1 | 2 | | | | 7 |
| 6 | | | | | 2 | —3,5 | 0,5 | | 0,5 | 0,5 |
| 7 | 0,5 | | | | | 0,5 | —21 | 10 | | 10 |
| 8 | 8 | 3 | | | | | 10 | —22 | 1 | |
| 9 | | | 1 | | | 0,5 | | 1 | —7,5 | 5 |
| 10 | | | | 7 | 7 | 0,5 | 10 | | 5 | —29,5 |

## ЛИТЕРАТУРА

1. Зелях Э. В. Основы общей теории линейных электрических схем. Изд-во АН СССР, М., 1951.
2. Гасс С. Линейное программирование. Физматгиз, М., 1961.
3. Сборник программ для БЭСМ. Вып. 1, ВИНИТИ, М., 1964.
4. Пухов Г. Е. Избранные вопросы теории математических машин. Изд-во АН УССР, К., 1964.

# ВОПРОСЫ ДИНАМИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ НА ПОСТОЯННОМ ТОКЕ

О. Н. ТОКАРЕВА, А. Е. СТЕПАНОВ, Н. М. ЛАБИНОВА

1. Расчет статически неопределимых стержневых систем средствами электромоделирования получил в настоящее время большое распространение.

Известны методы электронного моделирования, позволяющие определить усилия и перемещения, а также спектр частот и критических параметров рамных конструкций произвольной конфигурации [1, 2].

Альфа-аналоговый метод со смешанной системой моделирования неизвестных, как наиболее простой и экономичный, по сравнению с другими методами электронного моделирования при параллельном режиме работы усилителей, получил практическую реализацию в серийно выпускаемой отечественной промышленностью электронной модели стержневых систем «Альфа» (ЭМСС-8), предназначенной для расчета на прочность, а также определения минимального критического параметра и основной частоты собственных колебаний рам произвольного вида.

Обратимые же модели стержневых систем, с помощью которых можно решить те же задачи, что и на машине «Альфа» (ЭМСС-8), а также обратимые модели с дополнительными блоками произведения для решения прямой и обратной задач динамики [2] встречают серьезные затруднения при практической реализации в виде реальных устройств из-за большого числа электронных усилителей.

В работе [3] предложен динамический метод получения потенциально-нулевых точек в электронных моделях безынерционных объектов, позволяющий существенно сократить общее количество отрабатывающих усилителей.

Суть метода заключается в использовании одного или нескольких усилителей, последовательно подключаемых входами и выходами с помощью управляемого коммутатора к узлам электронной модели, к которым подсоединяются входы и выходы усилителей при параллельном режиме. При этом к местам подключения выходов усилителя подсоеди яются запоминающие конденсаторы, назначение

которых хранить значения напряжений в узлах модели до повторного подключения усилителя.

В настоящей статье будут рассмотрены вопросы динамического моделирования стержневых систем, связанные с созданием устройств, позволяющих производить расчеты на прочность, устойчивость и колебания при значительном сокращении числа электронных усили-

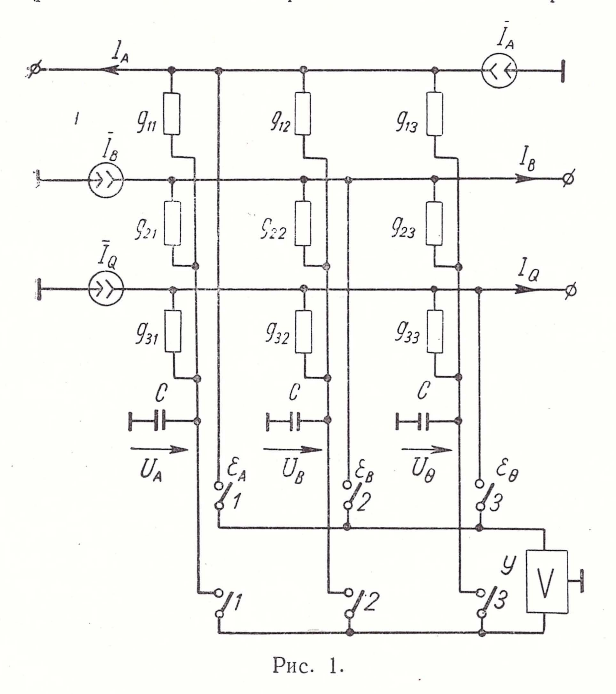



Рис. 1.

телей, уменьшении потребляемой мощности и стоимости. К числу указанных устройств относятся: динамическая альфа-аналоговая модель стержневых систем, динамическая обратимая модель для расчета рам и устройство для решения прямой и обратной задачи динамики рамных конструкций.

2. Приведем основные решающие элементы, которые можно использовать при построении динамической альфа-аналоговой модели со смешанной системой выражения неизвестных.

Как известно, состояние стержня переменной жесткости может быть описано следующими уравнениями метода деформаций:

$$M_A = a_{11}\varphi_A + a_{12}\varphi_B + a_{13}\theta + \overline{M}_A,$$
$$M_B = a_{21}\varphi_A + a_{22}\varphi_B + a_{23}\theta + \overline{M}_B, \qquad (1)$$
$$Q = a_{31}\varphi_A + a_{32}\varphi_B + a_{33}\theta + \overline{Q},$$

где $M_A$, $M_B$ — концевые изгибающие моменты; $Q$ — поперечная

сила; $\overline{M}_A$, $\overline{M}_B$ и $\overline{Q}$ — грузовые члены; $\varphi_A$, $\varphi_B$ — углы поворота; $\theta$ — угол перекоса; $a_{ij}$ — жесткостные коэффициенты.

Динамическая схема-аналог изгибаемого стержня изображена на рис. 1. Схема представляет параллельное соединение трехлучевых звезд омических проводимостей, пропорциональных жесткостным коэффициентам. Источниками тока моделируются грузовые члены.

В результате циклического переключения одного операционного усилителя У посредством управляемых ключей *1—1*, *2—2*, *3—3*, отрабатываются нулевые напряжения невязок $\varepsilon_A$, $\varepsilon_B$, $\varepsilon_\theta$, а постоян-

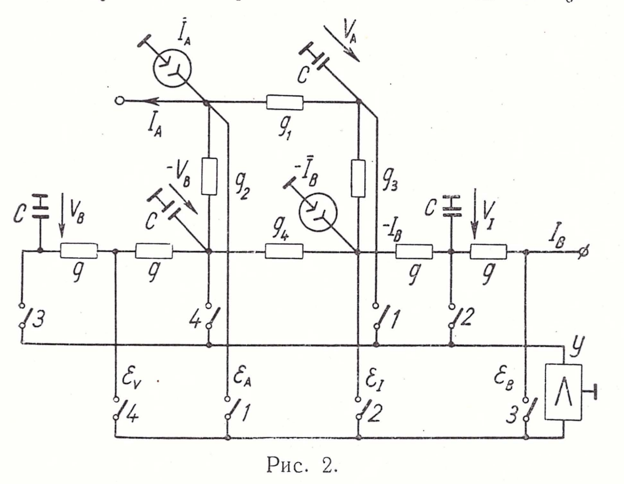



Рис. 2.

ные составляющие токов, протекающих по горизонтальным ветвям, и напряжений на запоминающих конденсаторах в установившемся периодическом режиме, возникающем вследствие переключения усилителя с достаточной частотой, будут по своим значениям близки величинам токов и напряжений, моделирующих усилия и перемещения, которые имели бы место при параллельной работе усилителей.

Уравнения метода деформаций для скручиваемого стержня переменной жесткости имеют вид

$$T_A = a_1 \Phi_A - a_2 \Phi_B + \overline{T}_A,$$

$$-T_B = a_3 \Phi_A - a_4 \Phi_B - \overline{T}_B, \qquad (2)$$

где $T_A$, $T_B$ — концевые скручивающие моменты; $\Phi_A$, $\Phi_B$ — углы закручивания; $a_i$ — жесткостные коэффициенты; $\overline{T}_A$, $\overline{T}_B$ — грузовые члены.

Динамическая схема-аналог скручиваемого стержня изображена на рис. 2.

Схема представляет сетку омических проводимостей $g_i$, моделирующих жесткостные коэффициенты $a_i$, и прецизионных проводи-

мостей $g$, предназначенных для инвертирования тока — $I_B$ в $I_B$ при реализации уравнений равновесия по моментам для узла $B$, и инвертирования напряжения $U_B$, отрабатываемого на полюсах схем-аналогов изгибаемых стержней, сходящихся в узле $B$, в напряжение — $U_B$. Источники тока $\bar{I}_A$, — $\bar{I}_B$ моделируют действие крутящей пролетной нагрузки.

Усилитель постоянного тока У с помощью синхронно замыкаемых пар ключей *1—1*, *2—2*, *3—3*, *4—4* последовательно выполняет функ-

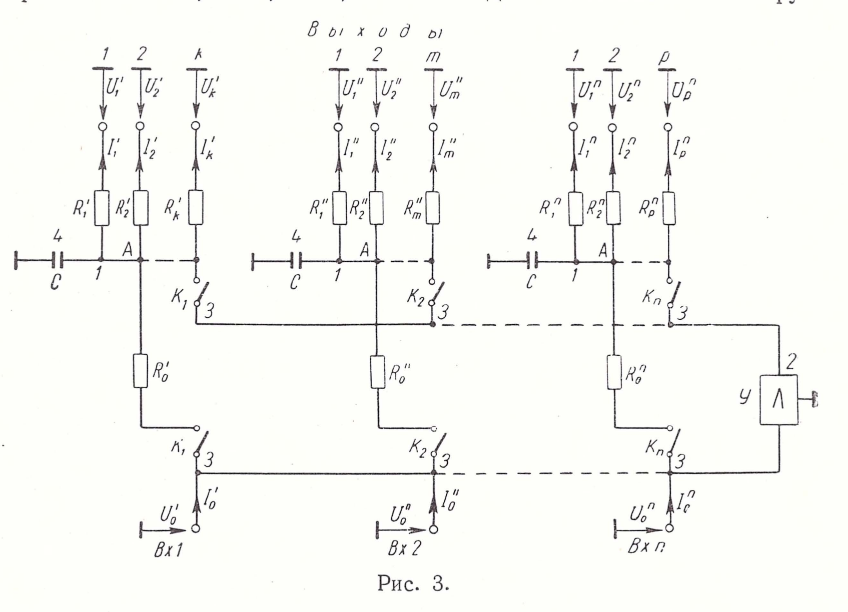



Рис. 3.

ции отрабатывающего усилителя, инвертора тока и инвертора напряжения.

В результате циклического переключения усилителя при достаточной частоте коммутации токи $I_A$, $I_B$,—$I_B$ и напряжения $U_A$, $U_B$, —$U_B$ на запоминающих конденсаторах, устанавливаются близкими к токам и напряжениям, моделирующим в схеме неизвестные скручивающие моменты $T_A$, $T_B$, — $T_B$ и углы закручивания $\Phi_A$, $\Phi_B$, — $\Phi_B$, а напряжения невязок $\varepsilon_A$, $\varepsilon_B$, $\varepsilon_I$, $\varepsilon_U$ — близкими к нулю.

Сокращение числа усилителей, а также омических проводимостей в моделях рамных систем становится более эффективным при использовании динамического принципа для построения электронных преобразователей тока. Электронные преобразователи в цепях с параллельным получением потенциально-нулевых точек описаны в работе [4]. Они представляют $(n + 1)$-лучевые звезды омических проводимостей, подключенные общей точкой к выходу, а $n + 1$ концом ко входу усилителя постоянного тока. Недостатком указанной схемы является большое число усилителей постоянного

тока, так как требуется по одному усилителю на каждое пропорциональное преобразование входного тока.

Динамический электронный преобразователь токов (рис. 3) не имеет такого недостатка. На рис. 3: *1* — $(i+1)$-лучевые звезды омических проводимостей; *2* — усилитель постоянного тока; *3* — синхронно коммутируемые пары ключей; *4* — запоминающие конденсаторы.

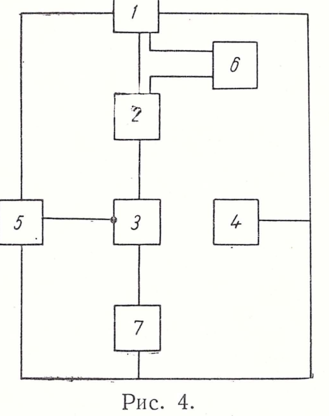


Рис. 4.

Схема работает следующим образом.

Усилитель постоянного тока (*2*) с помощью управляемых коммутирующих элементов циклически подключается входом к концам сопротивлений $R_0$, а выходом к общим точкам звезд $A$. При этом на запоминающих конденсаторах автоматически через некоторое число циклов отрабатываются такие значения напряжений, при которых обеспечивается преобразование $n$ входных токов $I_0^{'}, I_0^{''}, \ldots, I_0^{n}$ в необходимое число выходных токов с коэффициентами передачи, равными отношению сопротивления в цепи обратной связи усилителя к сопротивлениям на выходах каждого канала, при условии

$$U_0^{'} = U_0^{''} = \ldots = U_0^{n} = U_1^{'} = U_2^{'} = \ldots = U_k^{'} = U_1^{''} = U_2^{''} = \ldots =$$
$$= U_m^{''} = \ldots = U_1^{n} = U_2^{n} = \ldots = U_p^{n} = 0. \qquad (3)$$

При коммутации моделей рамных систем из отдельных схем-аналогов в случае последовательной отработки неизвестных имеется ряд особенностей. Узловые точки соединения полюсов моментов, поперечных сил, углов поворота и перекоса подсоединяются к ключевым элементам, а к узловым точкам соединения полюсов, напряжения на которых моделируют углы поворота и перекоса, подключаются конденсаторы.

В моделях регулярных рам усилители выполняют только функцию отработки нулевых потенциалов.

При моделировании нерегулярных рам усилитель последовательно выполняет функции отработки напряжений невязок $\varepsilon$, инвертирования напряжений и токов с различными коэффициентами, а также пропорциональное преобразование токов. Прецизионные входные, выходные сопротивления и сопротивления в цепи обратной связи непосредственно связаны с полюсами электронной модели стержневой системы.

На основе рассмотренных решающих элементов, а также динамических моделей стержней в неортогональных рамах и стержней, сжатых продольными силами и несущих равномерно распределенные и сосредоточенные массы, может быть построена динамическая альфа-

аналоговая цепь по блок-схеме, представленной на рис. 4, где: *1* — блок схем-аналогов стержней; *2* — блок линейных вставок; *3* — усилитель постоянного тока; *4* — измерительный блок; *5* — блок питания; *6* — блок запоминающих конденсаторов; *7* — устройство управления.

3. Метод последовательной отработки нулевых потенциалов оказывается также перспективным при построении динамических обратимых моделей стержневых систем, в которых все неизвестные (усилия и перемещения) моделируются электрическими напряже-

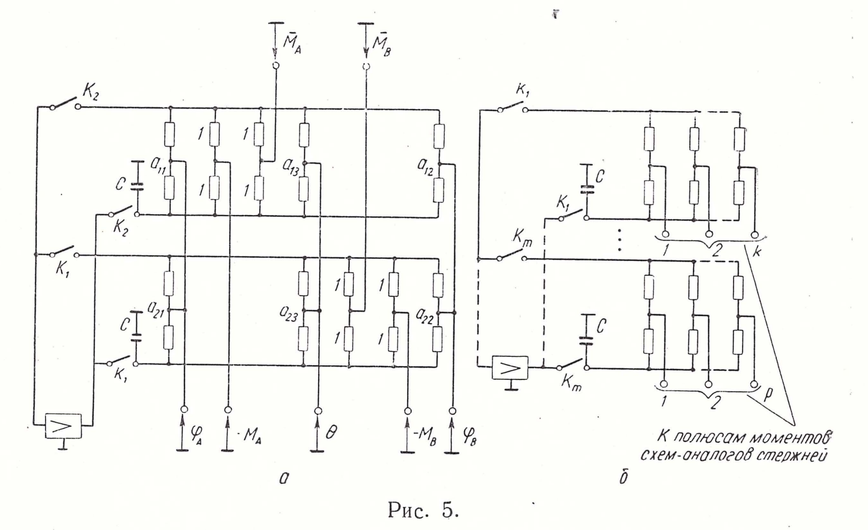



Рис. 5.

ниями. Создание таких моделей ранее было затруднено из-за большого числа отрабатывающих электронных усилителей, равного суммарной мерности векторов усилий и перемещений.

Обратимые электронные преобразователи с неизбежной сходимостью процесса уравновешивания могут быть использованы для решения задач устойчивости и динамики, связанных с определением спектра критических параметров и частот собственных колебаний, а также для решения задач вынужденных колебаний с произвольным значением частоты внешней пульсирующей нагрузки.

Основным решающим элементом динамических обратимых моделей стержневых систем является обратимая схема-аналог, изображенная на рис. 5, *а*. Схема рис. 5, *а* представляет квазианалог уравнений (1), на полюсах которой напряжениями моделируются моменты, углы поворота и угол перекоса. Для построения модели рамы необходимо реализовать уравнения равновесия по моментам и поперечным силам, что производится с помощью обратимых сумматоров (рис. 5, *б*), ко входам которых подключаются полюсы моментов схем-аналогов стержней. Для перемены знака напряжений, мо-

делирующих углы и линейные смещения, служат обратимые инверторы, схемы которых имеют тот же вид, что и на рис. 5, *б* с двумя входами каждая.

Блок-схему динамической обратимой модели стержневых систем, построенную на основе рассмотренных решающих элементов, можно представить в виде рис. 6, где *1* — блок проводимостей и источников, моделирующих параметры стержней; *2* — блок проводимостей сумматоров, подсоединяемых в обратную связь переключаемого усилителя; *3* — блок проводимостей масштабных звеньев, подсоединяемых в обратную связь переключаемого усилителя; *4* — усилитель постоянного тока с коммутирующими элементами; *5*—измерительный блок; *6* — блок питания; *7* — устройство управления; *8* — блок запоминающих конденсаторов.

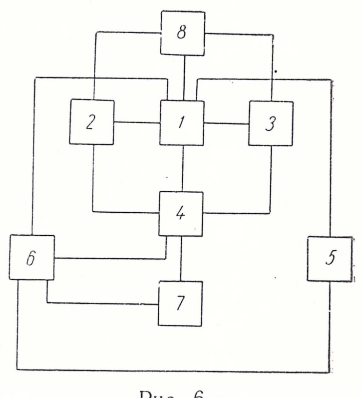


Рис. 6.

4. Динамический метод моделирования можно распространить на решение прямой и обратной задач динамики стержневых систем. Предложенная в работе [2] модель позволяет получить решение системы нелинейных алгебраических уравнений $f_i(X_1, X_2, \ldots, X_n) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, однако требует большого числа параллельно работающих отрабатывающих усилителей постоянного тока, инверторов тока и блоков произведения.

Динамическое устройство для решения прямой и обратной задач динамики стержневых систем изображено на рис. 7: *1* — обратимый квазианалог стержневой системы; *2* — блок произведения; *3* — инвертор напряжения; *4* — проводимости обратимых сумматоров, подсоединяемых в обратную связь переключаемого усилителя; *5* — нуль-индикатор; *6* — переключаемые усилители обратимого квазианалога стержневой системы и обратимых сумматоров; *7* — группы синхронно замыкаемых ключей $K_1'$, $K_2'$, ..., $K_n'$; *8* — синхронно замыкаемые пары ключей $K_1''$, $K_2''$, ..., $K_p''$; *9* — запоминающие конденсаторы.

Устройство работает следующим образом. Усилители постоянного тока $У_1$ и $У_2$ циклически подключаются к узлам обратимого квазианалога стержневой системы и обратимых сумматоров.

На входы обратимых сумматоров последовательно поступают через группы синхронно замыкаемых ключей $K_1'$, $K_2'$, ..., $K_n'$ напряжения, пропорциональные произведениям линейных смещений $\delta_i$ на квадраты частот спектра $\omega_i^2$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ (для прямой задачи динамики) или произведениям линейных смещений $\delta_i$ на массы $m_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ (для обратной задачи динамики).

Искомый спектр частот получается в виде ряда значений регулируемой э. д. с. $E_1$ (при решении прямой задачи э. д. с. $E_2 \div E_n$ отключены и замкнуты только ключи $K_1$), при которых реакция в единственной наложенной связи $r_{nn}^{(n-1)}$, фиксируемая нуль-индикатором, равна нулю.

Искомое распределение масс определяется итерационным методом, аналогичным методу Зейделя [2], в виде значений э. д. с.

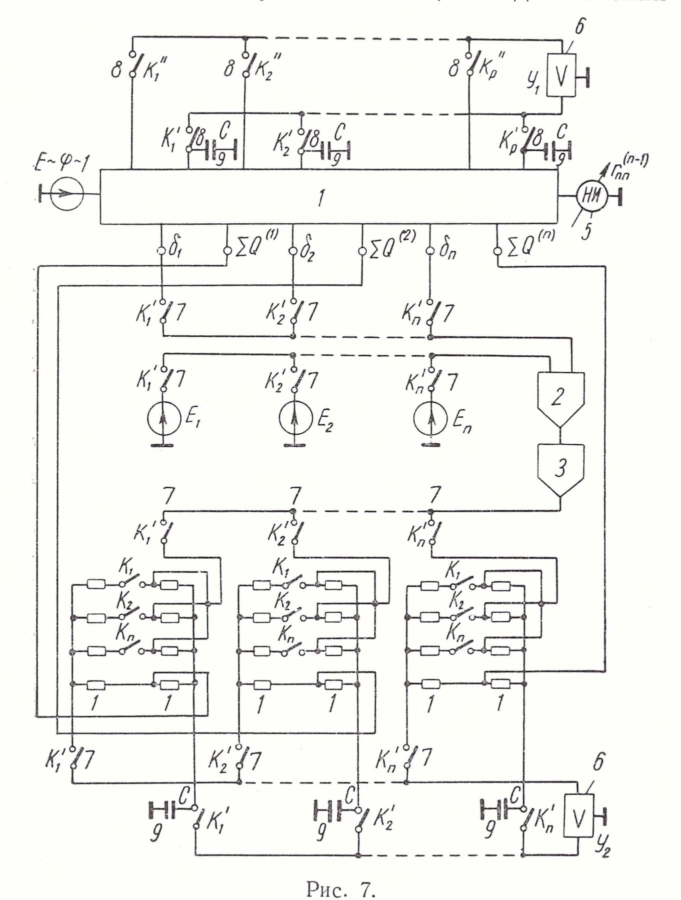


Рис. 7.

$E_1 \div E_n$, когда при всех положениях ключей $K_1$, $K_2$, ..., $K_n$ будет с определенной точностью равна нулю реакция $r_{nn}^{(n-1)}$.

5. Рассмотренные в статье вопросы построения электронных моделирующих устройств для решения задач прочности, устойчивости и колебаний, основанные на динамическом методе моделирования, представляют несомненный интерес, так как в указанных устройствах возможно существенно сократить число электронных

усилителей и уменьшить потребляемую мощность. Поэтому весьма актуальными становятся исследования в направлении практической реализации предложенных схем.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Пухов Г. Е., Васильев В. В., Степанов А. Е., Токарева О. Н. Электрическое моделирование задач строительной механики. Изд-во АН УССР, К., 1963.

2. Кондратьев В. М.— В кн.: Математическое моделирование и теория электрических цепей. Вып. IV. «Наукова думка», К., 1966.

3. Пухов Г. Е.— Кибернетика, 1965, 2.

4. Степанов А. Е., Токарева О. Н.— В кн.: Математическое моделирование и теория электрических цепей. Вып. III. «Наукова думка», К., 1965.

Доложено на семинаре
3 апреля 1966 г.

13 7-2622

# О МОДЕЛИРОВАНИИ РАМНЫХ СИСТЕМ ДИНАМИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Н. М. ЛАБИНОВА, О. Н. ТОКАРЕВА

1. В связи с предложением использовать метод динамического моделирования для создания новых электронных моделей стержневых систем [1] возникла необходимость проверить, применим ли

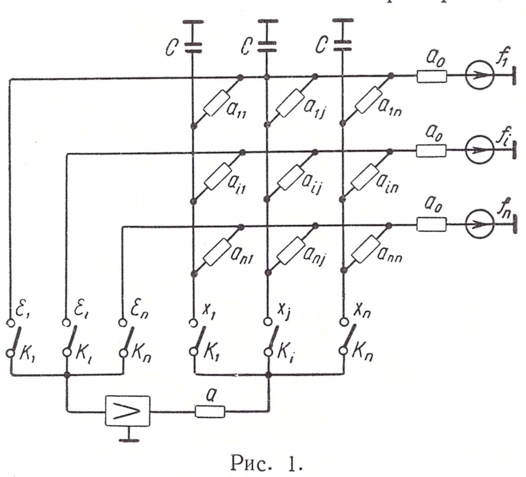



Рис. 1.

указанный метод к решению задач статики, устойчивости и динамики стержневых систем на альфа-аналоговой модели.

Поскольку рамные конструкции в строительной механике описываются системой линейных алгебраических уравнений, то для электронной динамической модели такой конструкции будут справедливы выводы, полученные для динамической модели линейных алгебраических уравнений вида

$$A\boldsymbol{x} = a_0\boldsymbol{f}. \tag{1}$$

Дифференциальное уравнение для вектора $\boldsymbol{x}$ на $q$-ом интервале $t_{sq} - t_{s,\,q-1} = h$ $s$-го цикла уравновешивания динамической модели

(рис. 1) системы (1) имеет вид [2]

$$C \frac{dx}{dt} + aW_q \boldsymbol{x} = a_0 \boldsymbol{F}_q, \tag{2}$$

где

$$W_q = B_q (E + kD_1^{-1} A) + \frac{1}{a} (D_2 - A^* D_1^{-1} A), \tag{3}$$

$$\boldsymbol{F}_q = (akB_q - A^*) D_1^{-1} \boldsymbol{f} \quad (q = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Здесь

$A$ — матрица взаимных проводимостей узлов $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ и узлов $x_1, \ldots, x_n$, равная матрице заданной системы уравнений;

$D_1$, $D_2$ — диагональные матрицы собственных проводимостей узлов $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ и $x_1, \ldots, x_n$ соответственно;

$\boldsymbol{f}$ — вектор э. д. с., равный вектору правых частей системы;

$\boldsymbol{x}$ — вектор узловых напряжений, моделирующий искомый вектор системы;

$\boldsymbol{\varepsilon}$ — вектор узловых напряжений, представляющий собой вектор невязок;

$k$ — модуль коэффициента усиления переключаемого усилителя;

$C$ — величины емкости запоминающих конденсаторов;

$a_0$ — величина проводимостей, служащих для задания правых частей;

$a$ — величина проводимости, включенной на выходе усилителя;

$A^*$ — транспонированная матрица;

$B_q$ — ключевая матрица:

$$\sum_{q=1}^{n} B_q = E. \tag{5}$$

Решение этого уравнения запишется в виде

$$\boldsymbol{x} = e^{-\frac{at}{C} W_q} \psi + \frac{a_0}{a} W_q^{-1} \boldsymbol{F}_q, \tag{6}$$

где $\psi$ — постоянная интегрирования.

2. Сравним динамическую модель, показанную на рис. 1, с приведенной на рис. 2 статической моделью той же алгебраической системы уравнений, обозначения оставим те же.

Уравнения статической модели, записанные по методу узловых потенциалов для узлов $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, совпадают с уравнениями (6) в работе [2] и в матричной форме записываются так:

$$D_1 \boldsymbol{\varepsilon} - A\boldsymbol{x} + a_0 \boldsymbol{f} = 0. \tag{7}$$

Уравнения статической модели, записанные по методу узловых потенциалов для узлов $x_1, \ldots, x_n$, имеют вид

$$(a_{11} + \ldots + a_{n1} + a) x_1 - (a_{11}\varepsilon_1 + \ldots + a_{n1}\varepsilon_n - ak\varepsilon_1) + a_0 f_1 = 0,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$(a_{1n} + \ldots + a_{nn} + a) x_n - (a_{1n} \varepsilon_1 + \ldots + a_{nn} \varepsilon_n - ak\varepsilon_n) + a_0 f_n = 0,$$

или, в матричной форме,

$$(D_2 + aE)\,\boldsymbol{x} - (A^* - akE)\,\boldsymbol{\varepsilon} = 0. \tag{8}$$

Подставив в уравнение (8) значение вектора $\boldsymbol{\varepsilon}$ из уравнения (7), получим следующее выражение для вектора $\boldsymbol{x}$ в статической модели:

$$\boldsymbol{x}_{\text{ст}} = \frac{a_0}{a}\,(W_q^{\text{ст}})^{-1}\,\boldsymbol{F}_q^{\text{ст}}, \tag{9}$$

где

$$W_q^{\text{ст}} = E\,(E + kD_1^{-1}A) + \frac{1}{a}\,(D_2 - A^*D_1^{-1}A), \tag{10}$$

$$\boldsymbol{F}_q^{\text{ст}} = (akE - A^*)\,D_1^{-1}\boldsymbol{f}. \tag{11}$$

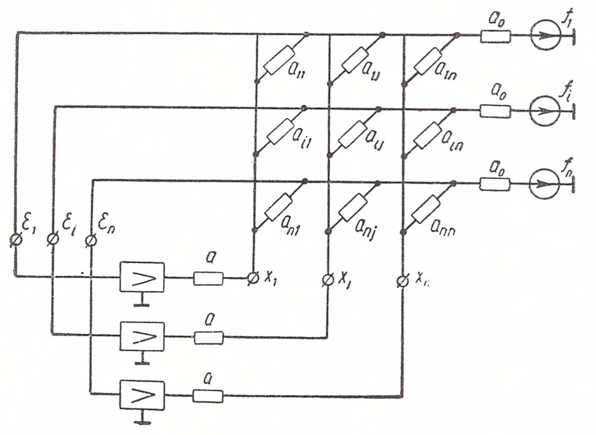



Рис. 2.

Из сравнения соотношений (9), (10) и (11) с выражениями (6), (3) и (4) соответственно видно, что вектор $\boldsymbol{x}$ в динамической модели, моделирующий вектор неизвестных системы (1), включает в себя вектор $\boldsymbol{x}$ в статической модели, как предельный случай при $t \to \infty$, если учесть при этом формулу (5).

На основании сказанного вектор $\boldsymbol{x}_{\text{дин}}$ можно представить следующим образом:

$$\boldsymbol{x}_{\text{дин}} = \boldsymbol{x}_{\text{ст}} + \boldsymbol{\Delta}. \tag{12}$$

На рис. 3 эта зависимость изображена графически, $\varphi$ — угол между векторами $\boldsymbol{x}_{\text{ст}}$ и $\boldsymbol{x}_{\text{дин}}$.

Воспользовавшись формулами для вычисления длин векторов [3]

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{x}_{\text{дин}}| &= \sqrt{\boldsymbol{x}_{\text{дин}}\cdot\boldsymbol{x}_{\text{дин}}} \\ |\boldsymbol{x}_{\text{ст}}| &= \sqrt{\boldsymbol{x}_{\text{ст}}\cdot\boldsymbol{x}_{\text{ст}}} \\ |\boldsymbol{\Delta}| &= \sqrt{\boldsymbol{\Delta}\cdot\boldsymbol{\Delta}} \end{aligned} \tag{13}$$

и угла между ними

$$\cos\varphi = \frac{x_{дин} \cdot x_{ст}}{|x_{дин}|\,|x_{ст}|}, \qquad (14)$$

можно проследить приближение вектора напряжений, моделирующих неизвестные на динамической модели, к тому же вектору для статической модели.

При этом значения вектора $x_{ст}$ можно получить, решив систему (1), а значения вектора $x_{дин}$ из зависимости

$$x(t_{mn}) = H_x^m x(t_{10}) + (E + H_x + H_x^2 + \ldots + H_x^m) L_x. \qquad (15)$$

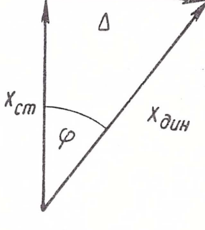


Рис. 3.

Равенство (15) выражает зависимость вектора неизвестных для динамической модели в конце $m$-го цикла процесса уравновешивания от его значения в начале первого цикла $x(t_{10})$ [2]. Здесь

$$H_x = \prod_{q=n}^{1} e^{-\frac{ha}{C} W_q}; \qquad (16)$$

$$L_x = \frac{a_0}{a} \sum_{q=1}^{n} \prod_{j=n}^{q+1} e^{-\frac{ha}{C} W_j} \left(E - e^{-\frac{ha}{C} W_j}\right) W_q^{-1} F_q, \qquad (17)$$

если условиться, что при $j = n$ и $q = n + 1$

$$e^{-\frac{ha}{C} W_j} e^{-\frac{ha}{C} W_q} = 1;$$

$$h = \frac{1}{f_0},$$

где $f_0$ — частота переключения усилителя *.

По формулам (13)—(17) можно проследить характер зависимости длины разности $|\Delta|$ векторов $x_{ст}$ и $x_{дин}$ и угла между ними от числа циклов уравновешивания и частоты переключения усилителя.

3. Для экспериментальной проверки возможности моделирования рамных систем динамическим методом была собрана динамическая модель плоской свободной ортогональной рамы (рис. 4). На рис. 4, *а* показана расчетная схема рамы, в кружках приведены номера стержней, I—I и II—II — сечения, для которых моделируются уравнения равновесия по поперечным силам.

На рис. 4, *б* приведена принципиальная схема динамической модели. Использованы условные обозначения схем-аналогов стержней [4].

Динамическая модель рамы содержит три усилителя, которые отрабатывают шесть напряжений, моделирующих шесть независимых

* Временем перелета контактов пренебрегаем.

перемещений рамы. Каждый усилитель отрабатывает две точки, так что весь цикл уравновешивания состоит из двух отрезков времени. В течение первого отрезка времени синхронно замыкаются ключи *1*, *3* и *5*, а в течение второго — *2*, *4* и *6*. В качестве ключей использовались электромагнитные реле, порядок переключения усилителей задавался на шаговом искателе. Схемы-аналоги стержней набирались на модели «Альфа».

При переходе от динамической модели к статической из схемы удалялись конденсаторы и ключи и дополнительно подключались еще

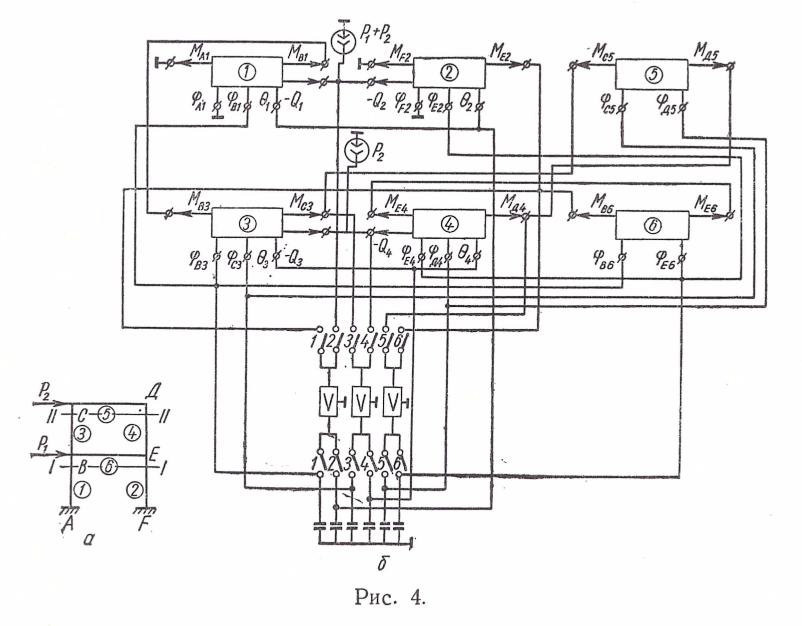



Рис. 4.

три усилителя. Результаты измерений, позволяющие сравнить векторы напряжений, моделирующих неизвестные, на статической и динамической модели, сведены в таблицу.

| Результаты решения | $U_1$ | $U_2$ | $U_3$ | $U_4$ | $U_5$ | $U_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| На статической модели | 14,5 | 6,7 | 8,75 | 16,5 | —23,5 | —31 |
| На динамической модели | 14 | 7 | 9,2 | 16 | —23,5 | —31,5 |

Из данных таблицы видно, что расхождение между измеренными значениями на статической и динамической модели не превышает 5%.

Выполненная работа свидетельствует о принципиальной возможности моделировать рамные системы динамическим методом.

Доведенный до практической реализации этот метод позволил бы удешевить электронные модели стержневых систем за счет сокращения числа усилителей в них.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Токарева О. Н., Степанов А. Е., Лабинова Н. М.— Настоящий сборник, 185.

2. Борковский Б. А.— Кибернетика, 1965, 3.

3. Пухов Г. Е. Избранные вопросы теории математических машин. Изд-во АН УССР, К., 1964.

4. Степанов А. Е., Токарева О. Н.— В кн.: Математическое моделирование и электрические цепи. Вып. II. Изд-во АН УССР, К., 1964.

Доложено на семинаре
8 апреля 1966 г.

# СУММАТОР-СРАВНИТЕЛЬ ДЛЯ ЭЛЕКТРОМОДЕЛИРОВАНИЯ ЗАДАЧ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

В. М. ОВСЯНКО

Большое количество задач строительной механики может в том или ином виде описываться системой линейных алгебраических уравнений.

При электромоделировании этих уравнений получаемые модели могут быть неуравновешиваемыми и уравновешиваемыми [1]. При уравновешивании электрической модели приходится подбирать значения электрических величин, моделирующих неизвестные, таким образом, чтобы уравнения модели и решаемые уравнения были аналогичны.

При уравновешивании электрической модели возникает необходимость разрешения двух основных задач: 1) суммирования получаемых в ходе решения задачи электрических величин и сравнения их с известными величинами; 2) автоматизации процесса уравновешивания.

Суммирование электрических напряжений обычно осуществляется более или менее просто. При суммировании токов могут возникнуть некоторые трудности, особенно если сумматор должен иметь независимые входы, что часто необходимо осуществлять при электромоделировании на постоянном токе.

Кроме суммирования токов необходимо сравнивать их с известной величиной, и, если равенство этих токов не будет осуществлено, то система автоматизации процесса уравновешивания должна будет таким образом изменить какие-то величины, скажем, напряжения источников э. д. с., включенных в систему, чтобы просуммированный ток и ток сравнения были равны. При этом на выходе устройства, которое назовем сумматором-сравнителем, получится нулевой ток, соответствующий уравновешенному состоянию системы.

Примерами токов, которые необходимо суммировать и сравнивать, являются токи, моделирующие произведения коэффициентов на неизвестные и свободные члены в системах линейных алгебраических уравнений, токи, соответствующие моменту разности поперечных

сил или поперечным силам при электромоделировании рамных или балочных систем. Во всех этих случаях ток сравнения известен, а токи, являющиеся составными частями тока сравнения и изменяющиеся при уравновешивании, неизвестны. Сумматор-сравнитель как раз и производит суммирование и сравнение токов и дает на выходе сигнал о равенстве или неравенстве просуммированного тока и тока сравнения. Этот выходной сигнал управляет системой автоматического уравновешивания системы, дает указание увеличить или уменьшить величины э. д. с., моделирующие уравновешиваемые неизвестные.

Сумматор-сравнитель с предъявленными к нему выше требованиями можно создать, используя реверсивный магнитный усилитель.

Магнитные усилители обладают целым рядом достоинств по сравнению с другими решающими элементами. Мгновенная готовность к работе, высокая надежность, высокая стабильность при изменении температуры и во времени, ударопрочность и другие положительные качества выгодно отличают их от других устройств.

В рассмотренном ниже реверсивном магнитном усилителе используется важное свойство отличия магнитных усилителей от электронных. Если электронный усилитель управляется напряжением, подаваемым на сетку лампы, то магнитный управляется током (или токами), подаваемым в обмотку управления и создающим напряженность магнитного поля.

Отсюда возникает стремление использовать магнитные усилители для суммирования $n$ сигналов, заданных в виде постоянных токов. Притом имеется возможность суммирования практически неограниченного числа сигналов без введения гальванической связи между ними, т. е. входы этих сигналов совершенно независимы.

Эти положительные свойства магнитных усилителей позволяют значительно сократить количество решающих элементов, используемых при электромоделировании какой-либо задачи строительной механики, причем стабильность работы установки с магнитными решающими усилителями, по сравнению с электронными или полупроводниковыми усилителями, повышается.

На рис. 1 показан реверсивный магнитный усилитель, который предназначен для суммирования и сравнения токов в случае автоматического уравновешивания системы и который вместе с выходным устройством — поляризованным реле типа РП-5, управляющим системой автоматики, назван сумматором-сравнителем. Реверсивный магнитный усилитель содержит $n$ обмоток управления с одинаковым количеством витков, куда подаются токи для суммирования, и одну обмотку сравнения с тем же количеством витков, включаемую встречно, куда подается известный ток для сравнения с суммой на остальных обмотках.

Обмотки управления $\omega^{1}_{\text{упр}}$, ..., $\omega^{i}_{\text{упр}}$ (рис. 1) в двух магнитных усилителях, из которых выполняется реверсивный суммирующий

магнитный усилитель, включены для каждого из магнитных усилителей так, что напряженности, создаваемые управляющими токами в магнитном усилителе I, направлены в одну сторону, а напряженности, создаваемые обмотками управления на магнитном усилителе II, противоположны направлению напряженностей магнитного усилителя I. Обмотки сравнения $\omega_{ср}$ включены так, что их напряженности противоположны напряженностям, создаваемым обмотками управления.

При таком противоположном включении обмоток сравнения и управления в случае, когда суммируемые в обмотках управления токи

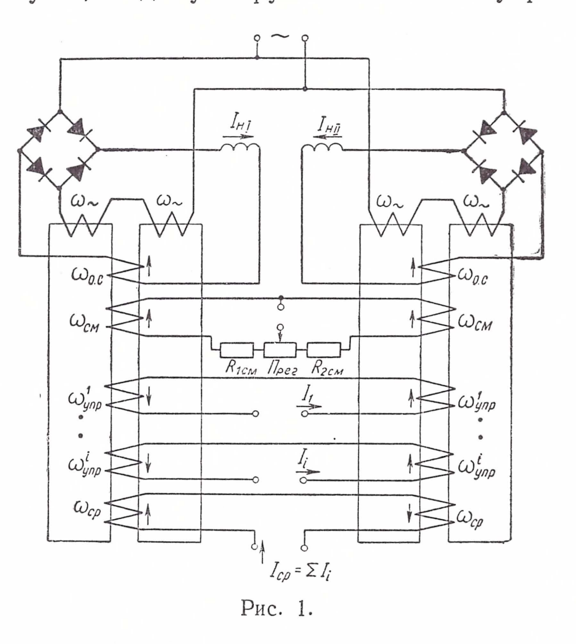



Рис. 1.

будут соответствовать уравновешенному состоянию электрической модели, суммарный управляющий ток в каждом магнитном усилителе (I и II) будет равен нулю. В этом случае на выходе магнитных усилителей I и II будут получаться токи $I_{нI}$ и $I_{нII}$, создаваемые только обмотками обратной связи и обмотками смещения.

Обмотки смещения в магнитных усилителях создают напряженности смещения, которые, складываясь с напряженностями обмоток обратной связи, регулируются с помощью потенциометра $П_{рег}$ так, чтобы при отсутствии тока в обмотках управления $\omega_{упр}$ и в обмотках сравнения $\omega_{ср}$ токи $I_{нI}$ и $I_{нII}$ были равны. Такое состояние реверсивного магнитного усилителя будем считать уравновешенным.

Если просуммированный в обмотках управления ток не равен известному току сравнения, то токи $I_{нI}$ и $I_{нII}$ на выходе реверсивного магнитного усилителя не равны.

Неравенство токов $I_{\text{н I}}$ и $I_{\text{н II}}$ улавливается чувствительным поляризованным реле типа РП-5 с двумя обмотками, через которые и проходят токи $I_{\text{н I}}$ и $I_{\text{н II}}$.

Реле РП-5 имеет три положения якоря: среднее — нейтральное, когда токи, протекающие в двух обмотках реле, равны и уравновешивают друг друга, что соответствует уравновешенному состоянию магнитного усилителя, и два крайних, когда, в зависимости от того, какой ток — $I_{\text{н I}}$ или $I_{\text{н II}}$ — больше, якорь отклоняется влево или вправо. Такое отклонение якоря реле свидетельствует о неуравновешенности системы и необходимости изменения величины э. д. с., подаваемых с блока задания каких-либо неизвестных, выражаемых напряжениями. Блок задания неизвестных напряжений обычно выполняется в виде многообмоточного трансформатора, со вторичных обмоток которого снимаются одинаковые величины э. д. с. Этот трансформатор по первичной обмотке управляется автотрансформатором, выполняемым обычно в виде латра.

Неуравновешенность системы сигнализирует о необходимости поворота движка латра в сторону увеличения или уменьшения снимаемого с латра напряжения, т. е. увеличения или уменьшения напряжений вторичных обмоток.

Для более плавной регулировки первичного напряжения целесообразно применять вместо латров поворотные трансформаторы, обмотки которых включаются специальным образом.

В случае, если ручное уравновешивание является достаточным, реверсивный магнитный усилитель будет на выходе содержать нагрузочное сопротивление, через которое проходят включенные встречно токи $I_{\text{н I}}$ и $I_{\text{н II}}$. Кроме того, в цепь токов $I_{\text{н I}}$ и $I_{\text{н II}}$ добавляются симметричные балластные сопротивления. Нулевой ток в нагрузочном сопротивлении улавливается микроамперметром.

Итак, в рассмотренных сумматорах-сравнителях реверсивные магнитные усилители используются только для отработки нулевого сигнала, управляющего усилителем тока, и на выходе усилителя важным является не усиленный управляющий сигнал, а состояние, когда этот управляющий сигнал равен нулю и нагрузка питается только током обмоток обратной связи, подкорректированным током обмоток смещения.

Для автоматического поворота движков латров или вращения поворотных трансформаторов можно применить блок автоматики. Привод блока автоматики осуществляется с помощью одного двигателя, вал которого передает вращение шестеренкам левого и правого поворота латра. Включение левого или правого поворота осуществляется исполнительными электромагнитами, которые управляются якорем поляризованного реле.

Сумматор-сравнитель применяется:

1) для суммирования и сравнения токов, моделирующих момент разности поперечных сил в электрической моделирующей установке ЭМУ-I-БПИ [4];

2) при моделировании систем линейных алгебраических уравнений;

3) при моделировании с использованием схем-аналогов изгибаемого стержня, моделирующих непосредственно поперечные силы, что дает возможность моделировать нерегулярные рамы, неразрезные балки на упруго-смещающихся опорах и системы перекрестных балок.

Применение сумматоров-сравнителей покажем на примере электрической модели системы алгебраических линейных уравнений. Модель основана на принципе суммирования в сумматоре-сравнителе нескольких токов, соответствующих произведениям коэффициентов на неизвестные и свободным членам, что дает возможность применить такой сумматор-сравнитель для моделирования каждой строки системы уравнений.

Предлагаемая модель имеет целый ряд отличительных положительных свойств: для ввода в модель уравнения не требуют специальной подготовки, знаки коэффициентов при неизвестных могут быть и положительными и отрицательными, модель проще в конструктивном отношении (существующие модели на каждый неизвестный требуют один или два электронных усилителя).

В качестве примера приведем моделирование системы из двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2 &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Преобразуем немного систему (1), разделив каждое из уравнений на число $A$, величина которого значительно превосходит наибольшие значения коэффициентов $a$ и $b$ (число $A$ для каждого уравнения может быть свое), и запишем систему (1) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\frac{x_1}{A}}{a_{11}} + \frac{\frac{x_2}{A}}{a_{12}} + \frac{b_1}{A} &= 0, \\ \frac{\frac{x_1}{A}}{a_{21}} + \frac{\frac{x_2}{A}}{a_{22}} + \frac{b_2}{A} &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Если теперь трактовать неизвестные как напряжения (в вольтах), величина типа $\frac{A}{a}$ — как сопротивления (в омах), а $\frac{b}{A}$ — как токи (в амперах), то уравнения (2) можно записать так:

$$\begin{aligned} \frac{u_1}{R_{11}} + \frac{u_2}{R_{12}} + I_{b_1} &= 0, \\ \frac{u_1}{R_{21}} + \frac{u_2}{R_{22}} + I_{b_2} &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Используя закон Ома, имеем

$$\begin{aligned} I_{11} + I_{12} + I_{b_1} &= 0, \\ I_{21} + I_{22} + I_{b_2} &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Предназначим для моделирования каждой строки по одному сумматору-сравнителю.

На сумматор-сравнитель в обмотки суммирования подаются токи $I_{ii}$ и $I_{ij}$, моделирующие произведения типа $a_{ii}x_i$ и $a_{ij}x_j$, на обмотки сравнения подается ток $I_{bi}$, моделирующий свободный член (уравнение (4)).

Обмотки суммирования и сравнения токов чаще всего (в зависимости от знака свободного члена) включаются встречно, так что напряженности, создаваемые ими, противоположно направлены.

Регулируя токи $I_{ii}$ и $I_{ij}$ можно добиться такого состояния сумматора-сравнителя, при котором суммарный управляющий ток равен нулю, т. е. в случае автоматического уравновешивания токи $I_{\text{нI}}$ и $I_{\text{нII}}$ (рис. 1) равны.

Если теперь для каждой строки моделируемой системы уравнений (4) взять один сумматор-сравнитель и менять токи $I_{ii}$ и $I_{ij}$ (при неизменяемом токе $I_{bi}$) таким образом, чтобы на выходе каждого сумматора-сравнителя получить нулевой управляющий ток, то схема рис. 1 будет электрической моделью одной строки системы алгебраических линейных уравнений.

При этом количество витков во всех обмотках управления и сравнения одинаково.

Если токи $I_{\text{нI}}$ и $I_{\text{нII}}$, протекающие по обмоткам поляризованного реле, поставленного на выходе, равны между собой, что соответствует уравновешенному состоянию системы, то якорь реле занимает среднее, нейтральное, положение. При этом суммарный ток управления равен нулю.

При неуравновешенном состоянии системы в зависимости от знака управляющего суммарного тока (тогда токи $I_{\text{нI}}$ и $I_{\text{нII}}$ не равны) якорь реле отклоняется влево или вправо, что дает сигнал системе автоматики изменить подаваемые в схему суммирования величины напряжений, моделирующих неизвестные.

Блок-схема электрической модели в случае автоматического уравновешивания системы включает: 1) блок неизвестных $x$; 2) блок задания свободных членов; 3) сумматоры-сравнители; 4) блок автоматической отработки нуля; 5) блок коэффициентов при неизвестных; 6) измерительный блок.

*Блок неизвестных* $x$ служит для задания напряжений, моделирующих переменные $x$.

Устройством для задания переменного $x$ является трансформатор, первичная обмотка которого питается регулируемым автотрансформатором с нулевой средней точкой. Вторичные обмотки трансформатора на своих выходах дают напряжения, пропорциональные неизвестному $x$. Для получения строго одинаковых напряжений на вторичных обмотках трансформаторов все вторичные обмотки мотаются одновременно с нескольких катушек.

*Блок задания свободных членов* включает в себя систему источников тока. На выходе каждого источника тока стоят три сопротивле-

ния: одно постоянное, ограничивающее, и два переменных, регулировочных. Токи для задания свободных членов остаются постоянными во время уравновешивания системы.

*Сумматор-сравнитель* производит суммирование токов в каждой строке уравнения (4) и проверку равенства нулю этой суммы.

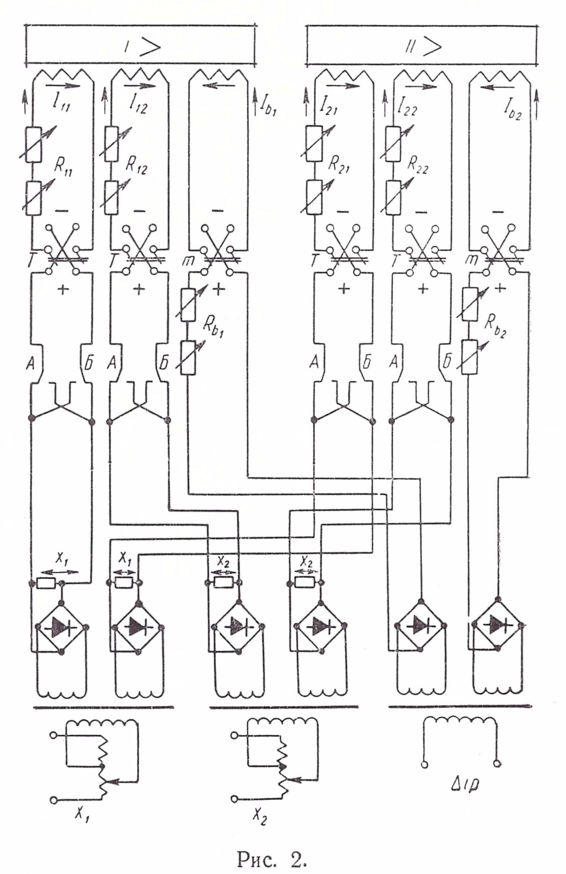



Рис. 2.

Таким устройством является описанный выше реверсивный магнитный усилитель.

Принцип работы блоков электрической модели рассмотрен на примере моделирования системы уравнений (1) с двумя неизвестными $x$.

Аналогично собирается схема моделирования системы алгебраических уравнений с любым количеством неизвестных.

На рис. 2 схематично показана электрическая модель системы двух уравнений. Здесь первый реверсивный магнитный усилитель (условно показан прямоугольником) предназначен для суммиро-

вания токов по первой строке уравнений (4). Сопротивления $R_{11}$ и $R_{12}$ моделируют коэффициенты $a_{11}$ и $a_{12}$ уравнения (1).

Сопротивление $R_{b_1}$ предназначено для установки тока $I_{b_1}$, пропорционального свободному члену $b_1$ уравнения (1) (этот ток остается постоянным во время уравновешивания системы).

Второй реверсивный магнитный усилитель (так же, как и первый, выполнен по схеме рис. 1) предназначен для суммирования токов по второй строке уравнений (4).

Если вращать ручки автотрансформаторов ЛАТР-1 и ЛАТР-2 (рис. 2), то на первый и второй сумматоры-сравнители будут поданы токи $I_{11}$, $I_{12}$, $I_{21}$ и $I_{22}$, вначале не равные своим действительным искомым значениям.

При определенном положении ручек автотрансформаторов можно добиться такого состояния, когда общая сумма входных токов в каждом сумматоре-сравнителе будет равна нулю, что соответствует уравновешенному состоянию системы. Это состояние будет отвечать решению уравнений (1).

Тумблеры Т (рис. 2) предназначены для установки знаков коэффициентов $a_{11}$, $a_{12}$, $a_{21}$, $a_{22}$, тумблеры $m$ — для установки знаков свободных членов $b_1$ и $b_2$.

Необходимо, кроме величин неизвестных, получить и их знаки. В зависимости от знака $x$ меняет свое направление и ток в соответствующих обмотках магнитных усилителей.

Для изменения знака $x$ при уравновешивании системы регулируемые автотрансформаторы (или еще лучше поворотные трансформаторы с изменением выходного напряжения при повороте на $\pm 180°$) делаются со средней нулевой точкой.

При этом одна половина латра условно соответствует положительному $x$, вторая — отрицательному.

Прохождение движка латра через нулевую точку и соответственно перемена знака $x$ фиксируется подвижным контактом, который через шаговый искатель и реле перемены знака управляет группой реле, контакты которых А и Б (рис. 2) непосредственно изменяют знак $x$.

*Блок автоматической обработки нуля* описан кратко выше. Контакты поляризованного реле, поставленного на выходе каждого сумматора-сравнителя, включаются в цепь исполнительных электромагнитов, которые подключают через храповики соответствующие шестеренки левого или правого вращения латра.

*Блок коэффициентов* при неизвестных служит для задания величин коэффициентов при неизвестных. Каждый коэффициент моделируется двумя переменными сопротивлениями для грубой и точной установки.

*Измерительный блок* предназначен для измерения сопротивлений, напряжений и токов.

Процесс работы на установке при автоматическом уравновешивании системы состоит в установке сопротивлений и токов, модели-

рующих коэффициенты при неизвестных и свободные члены, и включении блока автоматической отработки нуля.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Пухов Г. Е.— В кн.: Вопросы теории и применения математического моделирования. «Советское радио», М., 1965.

2. Тищенко Н. М. Стабильность магнитных усилителей. «Энергия», М.,— Л., 1964.

3. Пухов Г. Е., Васильев В. В., Степанов А. Е., Токарева О. Н. Электрическое моделирование задач строительной механики. Изд-во АН УССР, К., 1963.

4. Овсянко В. М.— Промышленность Белоруссии, 1965, 1.

5. Овсянко В. М.— Настоящий сборник, 209.

Доложено на семинаре
24 декабря 1965 г.

# ПРИМЕНЕНИЕ РЕВЕРСИВНЫХ МАГНИТНЫХ УСИЛИТЕЛЕЙ ПРИ ЭЛЕКТРОМОДЕЛИРОВАНИИ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

В. М. ОВСЯНКО

При суммировании токов возникает необходимость создания устройства с независимыми входами, способного производить суммирование и сравнение величин. Таким устройством может явиться сумматор-сравнитель, выполненный на основе реверсивного магнитного усилителя.

Рассмотрим возможности моделирования с применением реверсивных магнитных усилителей.

Уравнения строительной механики для изгибаемого стержня постоянного сечения [1] при расчете неразрезных балок и рам можно записать так:

$$\begin{aligned} M_A &= 4al\varphi_A + 2al\varphi_B - 6al\psi + \overline{M}_A, \\ M_B &= 2al\varphi_A + 4al\varphi_B - 6al\psi + \overline{M}_B, \\ B(\overline{Q} - Q) &= B6a\varphi_A + B6a\varphi_B - B12a\psi, \end{aligned} \qquad (1)$$

где $a = \frac{EI}{l^2}$; $B$ — число, значение которого будет получено ниже.

Моделирование уравнений (1) можно производить по следующей блок-схеме:

1) блок $I$ выполняется как неуравновешиваемая квазианалоговая модель для решения двух уравнений с двумя неизвестными;

2) блок $II$ как уравновешиваемая модель, где производится проверка равенства нулю суммы слагаемых третьего уравнения.

В такой блок-схеме не надо отрабатывать нули во всех трех уравнениях, так как блок $I$ всегда будет мгновенно решать два уравнения, ибо он не требует уравновешивания. Такой способ позволяет значительно сократить количество элементов, отрабатывающих нули при моделировании каждого из уравнений системы (1).

Уравнения (1) будем моделировать при помощи схемы-аналога, показанной на рис. 1.

Эта схема описывается уравнениями

$$I_A = \left(g_A + \frac{g_m}{2} + \frac{g_n}{2}\right) U_A + \left(\frac{g_n}{2} - \frac{g_m}{2}\right) U_B - E g_A + \bar{I}_A,$$
$$\dot{I}_B = \left(\frac{g_n}{2} - \frac{g_m}{2}\right) U_A + \left(g_B + \frac{g_m}{2} + \frac{g_n}{2}\right) U_B - E g_B + \bar{I}_B. \qquad (2)$$

Сравнивая уравнения (1) и (2), наблюдаем аналогии: моменты аналогичны токам, напряжения — углам поворота и перекоса.

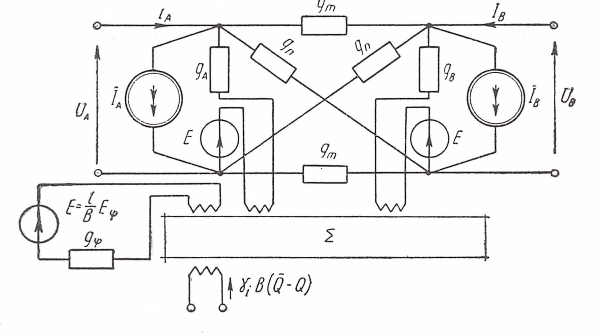



Рис. 1.

Проводимости $g_m$ и $g_n$ вычисляются из уравнений

$$g_A + \frac{g_m}{2} + \frac{g_n}{2} = k4al,$$
$$\frac{g_n}{2} - \frac{g_m}{2} = k2al. \qquad (3)$$

Тогда

$$g_A = g_B = kB6a,$$
$$g_m = k2al - g_A, \qquad (4)$$
$$g_n = k4al + g_m,$$

где $k$ — масштабный коэффициент проводимостей.

Для некоторых случаев проводимость $g_m$ может оказаться равной нулю.

Тогда

$$B = \frac{l}{3}. \qquad (5)$$

С помощью схемы-аналога, у которой проводимость $g_m = 0$, легко моделируются регулярные многоэтажные рамы с одинаковыми длинами стоек в этаже. Для таких схем-аналогов проводимости под-

считываются по формулам

$$g_A = k\,\frac{2EJ}{l},\qquad g_m = 0,\qquad g_n = k\,\frac{4EJ}{l}. \tag{6}$$

Теперь рассмотрим ток, моделирующий момент $6\,al\,\psi$ в уравнении (1). Этот момент моделируется током $Eg_A$ в уравнении (2). С другой стороны, ток равен $k\,6alE_\psi$, где $E_\psi$ — э. д. с., полностью аналогичная углу перекоса $\psi$. Отсюда

$$E = \frac{l}{B}\,E_\psi. \tag{7}$$

Уравнение токов, моделирующее уравнение поперечных сил системы (1), синтезируется следующим образом. Сумма токов, протекающих в ветвях с проводимостями $g_A$ и $g_B$, с учетом соотношения (7) равна

$$g_A U_A + g_A U_B - 2g_A\,\frac{l}{B}\,E_\psi. \tag{8}$$

Нам надо получить ток, соответствующий поперечной силе в уравнении (1):

$$g_A U_A + g_A U_B - 2g_A E_\psi. \tag{9}$$

Чтобы получить ток (9), надо к току (8) добавить ток, равный

$$2g_A E_\psi\left(\frac{l}{B} - 1\right). \tag{10}$$

Моделирование уравнения поперечных сил производится сумматором-сравнителем, выполненным на базе реверсивного магнитного усилителя.

На этот реверсивный магнитный усилитель подается известный ток, моделирующий известное произведение $B\,(\overline{Q} - Q)$ для сечения, перерезывающего смещающиеся стержни. В другие обмотки управления сумматора-сравнителя подаются следующие токи:

1) ток уравнения (8), протекающий в ветвях $g_A$ и $g_B$;
2) ток выражения (10).

Для того чтобы со всех трех обмоток трансформатора снимать одно напряжение $E = \frac{l}{B}\,E_\psi$, подаваемое в схему рис. 1, величина проводимости $g_\psi$ должна иметь значение

$$g_\psi = kB^2 12a\left(\frac{\frac{l}{B} - 1}{l}\right). \tag{11}$$

Полученная схема-аналог (рис. 1) изгибаемого стержня позволяет чисто машинным образом производить расчет нерегулярных рам.

Покажем это на примере рамы рис. 2. Особенностью моделирования данной системы является то, что рама является нерегулярной и поэтому при моделировании обычными методами приходится прибегать к машинно-аналитическому способу расчета, так как непосредственное моделирование поперечных сил с помощью известных схем-аналогов (кроме электронных) не может быть осуществлено.


Рис. 2.

При моделировании с помощью схемы-аналога рис. 1 имеется возможность моделирования сумм поперечных сил в сечениях I—III. Проводимости схем-аналогов подсчитываются по формулам (4) и (11).

Примем наименьшую длину первого стержня за базисную и по формуле (5) подсчитаем

$$B = \frac{l_{баз}}{3} = \frac{2}{3}.$$

При $B=2/3$ в схемах-аналогах стержней *1* и *2* проводимость $g_m$ равна нулю. Величины проводимостей для схем-аналогов стержней рамы рис. 2 приведены в табл. 1.

Уравнения равновесия для сечений I—III имеют вид

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = P_1 = 3,$$

$$Q_5 + Q_4 + Q_3 = P_1 + P_2 = 7,$$

$$Q_5 + Q_6 + Q_7 = P_1 + P_2 = 7.$$

Все уравнения поперечных сил умножим на $B$ и произведем моделирование уравнений

$$B(Q_1 + Q_2 + Q_3) = 2,$$

$$B(Q_5 + Q_4 + Q_3) = 4\frac{2}{3},$$

$$B(Q_5 + Q_6 + Q_7) = 4\frac{2}{3}.$$

Следует отметить, что можно уравнения поперечных сил не умножать на $B$, а моделировать поперечные силы полностью, но тогда уравнения моментов системы (1) необходимо умножить на число $c = \frac{3}{l_{баз}}$.

Примем за независимые углы перекоса

$$\psi_1 = \psi_2, \quad \psi_4, \quad \psi_6 = \psi_7,$$

тогда

$$\psi_3 = \frac{l_2}{l_3}\psi_2 + \frac{l_4}{l_3}\psi_4,$$

$$\psi_5 = \frac{l_4}{l_5}\psi_4 + \frac{l_6}{l_5}\psi_6.$$

Таблица 1

| № стержней | $g_A$ | $g_m$ | $g_n$ | $g_\psi$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $k\,EJ_0$ | 0 | $k\,2EJ_0$ | $k\,\frac{4}{3}\,EJ_0$ |
| 2 | $k\,2EJ_0$ | 0 | $k\,4EJ_0$ | $k\,\frac{8}{3}\,EJ_0$ |
| 3 | $k\,\frac{1}{3}\,EJ_0$ | $k\,\frac{2}{3}\,EJ_0$ | $k\,\frac{8}{3}\,EJ_0$ | $k\,\frac{16}{27}\,EJ_0$ |
| 4 | $k\,\frac{1}{2}\,EJ_0$ | $k\,\frac{1}{2}\,EJ_0$ | $k\,\frac{5}{4}\,EJ_0$ | $k\,\frac{5}{6}\,EJ_0$ |
| 5 | $k\,\frac{4}{49}\,EJ_0$ | $k\,\frac{10}{49}\,EJ_0$ | $k\,\frac{38}{49}\,EJ_0$ | $k\,\frac{144}{1029}\,EJ_0$ |
| 6 | $k\,\frac{4}{9}\,EJ_0$ | $k\,\frac{2}{9}\,EJ_0$ | $k\,\frac{14}{9}\,EJ_0$ | $k\,\frac{56}{81}\,EJ_0$ |
| 7 | $k\,\frac{4}{9}\,EJ_0$ | $k\,\frac{2}{9}\,EJ_0$ | $k\,\frac{14}{9}\,EJ_0$ | $k\,\frac{56}{81}\,EJ_0$ |
| 8 | $k\,2EJ_0$ | 0 | $k\,4EJ_0$ | 0 |
| 9 | $k\,2EJ_0$ | 0 | $k\,4EJ_0$ | 0 |
| 10 | $k\,\frac{4}{3}\,EJ_0$ | 0 | $k\,\frac{8}{3}\,EJ_0$ | 0 |
| 11 | $k\,\frac{4}{3}\,EJ_0$ | 0 | $k\,\frac{8}{3}\,EJ_0$ | 0 |

Для моделирования независимых перекосов возьмем три трансформатора, напряжения первичных обмоток которых регулируются автотрансформаторами. Источники э. д. с., моделирующие перекосы $\psi_3$ и $\psi_5$, получаются из суммирования частей э. д. с., моделирующих $\psi_2$ и $\psi_4$, $\psi_4$ и $\psi_6$ с помощью последовательного соединения этих частей э. д. с. Коэффициенты типа $\frac{l_2}{l_3}$ устанавливаются на делителях напряжений.

Уравнения поперечных сил моделируются на сумматорах-сравнителях. На каждое сечение предназначен один сумматор-сравнитель. Так как $BQ_3$ входит в сечения I и II, то ток, моделирующий эту поперечную силу, должен быть последовательно пропущен через I и II сумматоры-сравнители, а ток, моделирующий поперечную силу $BQ_5$, которая попадает во II и III сечения, пропускается последовательно через II и III сумматоры-сравнители.

Теперь рассмотрим схему-аналог стержня переменного сечения. Основные уравнения для стержня переменного сечения запишем так:

$$M_A = al\,[K_{AA}\varphi_A + K_{AB}\varphi_B - (K_{AA} + K_{AB})\,\psi] + \overline{M}_A,$$
$$M_B = al\,[K_{AB}\varphi_A + K_{BB}\varphi_B - (K_{BB} + K_{AB})\,\psi] + \overline{M}_B, \qquad (12)$$
$$B\,(\overline{Q} - Q) = Ba\,[\,(K_{AA} + K_{AB})\,\varphi_A + (K_{BB} + K_{AB})\,\varphi_B -$$
$$- (K_{AA} + K_{AB})\,\psi - (K_{BB} + K_{AB})\,\psi],$$

где

$$a = \frac{2EJ_0}{l^2}, \qquad (13)$$

$K_{ij}$ — коэффициенты, характеризующие жесткостные характеристики стержня; $J_0$ — базисная жесткость.

В случае, когда моделируемый стержень имеет характер изменения сечения, определяемый выражением $K_{AA} > K_{BB}$, схема-аналог его будет несимметричной и отличается от схемы рис. 1 добавочной проводимостью $g'_A$, которая ставится параллельно источнику тока $\overline{I}_A$. Если $K_{BB} > K_{AA}$, проводимость $g'_A$ отсутствует, а вместо нее добавляется проводимость $g'_B$.

Полученная схема-аналог описывается уравнениями

$$I_A = \left(g_A + g'_A + \frac{g_m}{2} + \frac{g_n}{2}\right) U_A + \left(\frac{g_n}{2} - \frac{g_m}{2}\right) U_B - Eg_A + \overline{I}_A,$$
$$I_B = \left(\frac{g_n}{2} - \frac{g_m}{2}\right) U_A + \left(g_B + \frac{g_m}{2} + \frac{g_n}{2}\right) U_B - Eg_B + \overline{I}_B. \qquad (14)$$

Эти уравнения являются подобными уравнениям моментов системы (12).

Чтобы моделировать уравнение поперечной силы системы (12), необходимо, чтобы проводимости $g_A$ и $g_B$ имели следующие значения:

$$g_A = Bka\,(K_{AA} + K_{AB}),$$
$$g_B = Bka\,(K_{BB} + K_{AB}). \qquad (15)$$

Тогда токи, протекающие по ветвям $g_A$ и $g_B$, будут входить в основную часть тока, моделирующего поперечную силу стержня. Учитывая аналогичность уравнений моментов (12) и токов (14), имеем

$$g'_A = (kal - Bka)\,(K_{AA} - K_{BB}),$$
$$g_m = kal\,(K_{BB} - K_{AB}) - g_B, \qquad (16)$$
$$g_n = 2kalK_{AB} + g_m.$$

В уравнениях (15) и (16) $k$ — масштабный коэффициент проводимостей. В некоторых случаях проводимость $g_m$ может оказаться равной нулю. Тогда

$$B = l\,\frac{(K_{BB} - K_{AB})}{(K_{BB} + K_{AB})}. \qquad (17)$$

В практических расчетах при определении $B$ могут встретиться три основных случая.

1. Рассчитывается регулярная рама со стержнями, имеющими одинаковый закон изменения жесткости по высоте для каждого этажа. Тогда для каждого этажа существует свое число $B$, а проводимости $g_m$ будут равны нулю.

2. Если регулярная рама при одинаковых длинах стоек в этаже имеет стержни с разными законами изменения сечения, то для одного из таких стержней подсчитывается $B$. Для этого стержня проводимость $g_m$ будет равна нулю, а для остальных подсчитывается по уравнениям (16) с учетом $B$ для первого стержня.

3. Если рассчитывается нерегулярная рама типа рис. 2, то за основной принимается стержень с наименьшей длиной и наименьшей жесткостью. Для этого стержня подсчитывается $B$. Проводимость $g_m$ для него равна нулю, а для остальных стержней она подсчитывается с учетом числа $B$ для первого стержня (можно подсчитать для всех стержней $B$ и выбрать наименьшее).

Из аналогии токов $Eg_A$ и $Eg_B$ (уравнения (14)) и соответствующих им моментов (из уравнений (12)) найдем соотношение между $E$ и $E_\psi$, где $E$ — напряжение, подаваемое в схему-аналог, $E_\psi$ — напряжение, полностью аналогичное углу перекоса $\psi$:

$$E = \frac{l}{B} E_\psi . \tag{18}$$

Сумма токов в ветвях $g_A$ и $g_B$ имеет вид

$$g_A U_A + g_B U_B - E (g_A + g_B) . \tag{19}$$

Нам необходимо получить ток, моделирующий уравнение поперечной силы из системы (12):

$$\gamma_i B (\bar{Q} - Q) = g_A U_A + g_B U_B - g_A E_\psi - g_B E_\psi . \tag{20}$$

Ток (20) может быть получен, если к току (19) добавить (с учетом (18)) ток

$$E (g_A + g_B) \left(1 - \frac{B}{l}\right) . \tag{21}$$

При этом проводимость $g_\psi$ имеет вид

$$g_\psi = \left(1 - \frac{B}{l}\right) (g_A + g_B) . \tag{22}$$

Суммирование токов (19) и (21) производится на сумматоре-сравнителе [7], куда для сравнения подается, кроме этих токов, известный ток, равный $\gamma_i B (\bar{Q} - Q)$, где $\gamma_i$ — масштабный коэффициент токов. На сумматоре-сравнителе происходит суммирование токов и сравнение их с известной величиной, т. е. производится отработка нуля. Эта отработка производится автоматически посредством изменения величины напряжений $E$ с помощью системы автоматики, предназначенной для левого и правого вращения латров. Латры (или лучше —

вращающиеся трансформаторы) предназначены для подачи напряжения на первичные обмотки трансформаторов, вторичные обмотки которых дают напряжение $E$.

На базе рассмотренных схем-аналогов можно построить схемы-аналоги для электромоделирования балок на упруго смещающихся опорах и систем перекрестных балок.

Синтезируем схему-аналог изгибаемого стержня постоянного сечения при электромоделировании неразрезных балок с упруго смещающимися опорами. Рассмотрим отдельный стержень балки. Под действием нагрузки опоры $A$ и $B$ стержня сместились на величины $\delta_A$ и $\delta_B$, при этом прямая $AB$ повернулась на угол $\psi$ (пусть $\delta_B > \delta_A$):

$$\psi = \frac{\delta_B - \delta_A}{l}. \qquad (23)$$

При расчете балок на упруго смещающихся опорах необходимо учитывать упругие характеристики опор. Такой известной характеристикой является коэффициент податливости $c$, представляющий собой перемещение опоры, вызванное единичной силой. Тогда перемещение любой опоры запишется так:

$$\delta = cR^{\text{у.о.}}, \qquad (24)$$

где $R^{\text{у.о}}$ — реакция упруго оседающей опоры. Реакции на упруго оседающих опорах $A$ и $B$ стержня определяются из равенства (24):

$$R_A^{\text{у.о.}} = \frac{\delta_A}{c_A}, \quad R_B^{\text{у.о}} = \frac{\delta_B}{c_B}. \qquad (25)$$

Используя известные [1] уравнения для изгибаемого стержня, уравнения (1), (23) и (25) и принимая $a = \frac{EJ}{l^2}$, получим систему уравнений, характеризующих стержень балки на упругих опорах

$$\begin{aligned}
M_A &= 4al\varphi_A + 2al\varphi_B - 6(\delta_B - \delta_A) + \overline{M}_A,\\
M_B &= 2al\varphi_A + 4al\varphi_B - 6(\delta_B - \delta_A) + \overline{M}_B,\\
-BQ_A &= B6a\varphi_A + B6a\varphi_B - B\frac{12a}{l}(\delta_B - \delta_A) - B\overline{Q}_A,\\
-BQ_B &= B6a\varphi_A + B6a\varphi_B - B\frac{12a}{l}(\delta_B - \delta_A) - B\overline{Q}_B,\\
BR_A^{\text{у.о.}} &= b_A Ba\delta_A, \quad BR_B^{\text{у.о.}} = b_B Ba\delta_B.
\end{aligned} \qquad (26)$$

Здесь
$$b_A = \frac{1}{ac_A}, \quad b_B = \frac{1}{ac_B}. \qquad (27)$$

Уравнения (26) и (27) подлежат моделированию.

Обратимся к схеме рис. 1. Уравнения схемы рис. 1 (2) аналогичны уравнениям моментов системы (26). Проводимости и число $B$ подсчитывается по формулам (4) и (5).

При этом

$$E = \gamma_\varphi \frac{1}{B} (\delta_B - \delta_A), \tag{28}$$

где $\gamma_\varphi$ — масштабный коэффициент напряжений.

При подсчете $B$ за $l$ принимается длина наименьшего пролета.

Теперь рассмотрим, каким образом моделируются уравнения поперечных сил системы (26).

Сумма токов в ветвях с проводимостями $g_A$ и $g_B$ (рис. 1) равна

$$g_A U_A + g_A U_B - 2 g_A E. \tag{29}$$

Нам же надо получить токи, соответствующие поперечным силам (26) $-BQ_A$ и $-BQ_B$. Эти токи равны:

$$\begin{aligned} B\gamma_i Q_A &= g_A U_A + g_B U_B - \frac{2B}{l} g_A E - B\gamma_i \overline{Q}_A, \\ B\gamma_i Q_B &= g_A U_A + g_B U_B - \frac{2B}{l} g_A E - B\gamma_i \overline{Q}_B. \end{aligned} \tag{30}$$

Токи $B\gamma_i \overline{Q}_A$ и $B\gamma_i \overline{Q}_B$ известны заранее и могут быть введены в сумматор без изменений. Чтобы получить часть тока из уравнений (30), равную

$$g_A U_A + g_A U_B - \frac{2B}{l} g_A E, \tag{31}$$

к току (29) следует добавить ток

$$2 g_A \left(1 - \frac{B}{l}\right) E. \tag{32}$$

Величину э. д. с. можно получить так:

$$E = \frac{1}{B} (E_B - E_A), \tag{33}$$

где $E_A$ и $E_B$ — напряжения, моделирующие вертикальные перемещения $\delta_A$ и $\delta_B$ концов стержня. Эти перемещения принимаем за основные неизвестные и будем подбирать (автоматически) напряжения $E_A$ и $E_B$ таким образом, чтобы сумма реакций и поперечных сил на опорах балки равнялась нулю.

На сумматор-сравнитель подаем токи:

1) ток выражения (29);

2) дополнительный ток (32), получаемый в цепи с проводимостью $g_\psi$:

$$g_\psi = 2 g_A \left(1 - \frac{B}{l}\right); \tag{34}$$

вычитание источников э. д. с. $E_B$ и $E_A$ производится последовательным включением выходов с одинаковой полярностью вторичных обмоток трансформаторов, дающих $E_A$ и $E_B$;

3) ток типа $B\gamma_i \overline{Q}_A$;

4) ток для моделирования реакции упругой опоры, который определяется так:

$$\gamma_i B R_A^{\text{у.о}} = k b_A B^2 a \frac{1}{B} E_A,$$
$$\gamma_i B R_B^{\text{у.о}} = k b_B B^2 a \frac{1}{B} E_B. \qquad (35)$$

Для получения токов (35) в цепь источника э. д. с. включается проводимость $g_A^{\text{у.о}}$ или $g_B^{\text{у.о}}$:

$$g_A^{\text{у.о}} = k b_A B^2 a,$$
$$g_B^{\text{у.о}} = k b_B B^2 a. \qquad (36)$$

При моделировании неразрезных балок на упруго смещающихся опорах для каждой опоры записываются уравнения сумм поперечных

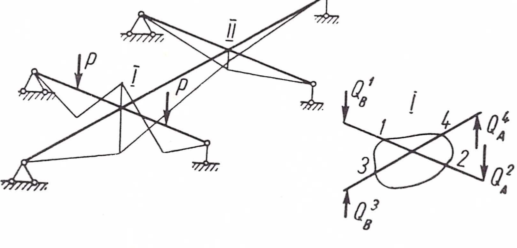



Рис. 3.

сил и реакций. Так как токи (29) и (32) моделируют части поперечных сил $Q_A^i$ и $Q_B^i$ на левой и правой опорах пролета, то при суммировании поперечных сил на опорах эти токи надо пропустить через два сумматора-сравнителя, реализующие сумму поперечных сил на двух соседних опорах.

Теперь рассмотрим систему перекрестных балок, находящуюся под действием нагрузки из плоскости балок. Будем моделировать расчет балок без учета кручения. Уравнения, описывающие стержень постоянного сечения при плоском изгибе, будут такие же, как и для неразрезной балки на упруго смещающихся опорах (26). Схема-аналог будет тоже такой же.

Построение модели системы балок заключается в следующем:

1. Производится набор и соединение схем-аналогов отдельных стержней в двух взаимно перпендикулярных плоскостях по периметру моделируемой системы. При этом уравнения равновесия моментов в узлах в каждой плоскости и уравнения совместности угловых перемещений выполняются автоматически.

2. Уравнения равновесия по поперечным силам выполняются для круговых сечений в узлах пересечения балок. Для таких сечений сумма проекций всех внутренних и внешних сил в узле на вертикальную ось должна быть равна нулю. За основные неизвестные тогда

принимаются вертикальные перемещения узлов. Для системы рис. 3 такими узлами являются узлы I и II. Эти перемещения подбираются (автоматически с помощью следящей системы) таким образом, чтобы выполнялись условия равновесия по поперечным силам. Такими условиями для сечений I и II являются:

для сечения I—I: $Q_B^3 + Q_A^4 - Q_B^1 - Q_A^2 = 0$,

для сечения II—II: $Q_B^5 + Q_A^6 + Q_A^7 - Q_B^4 = 0$.

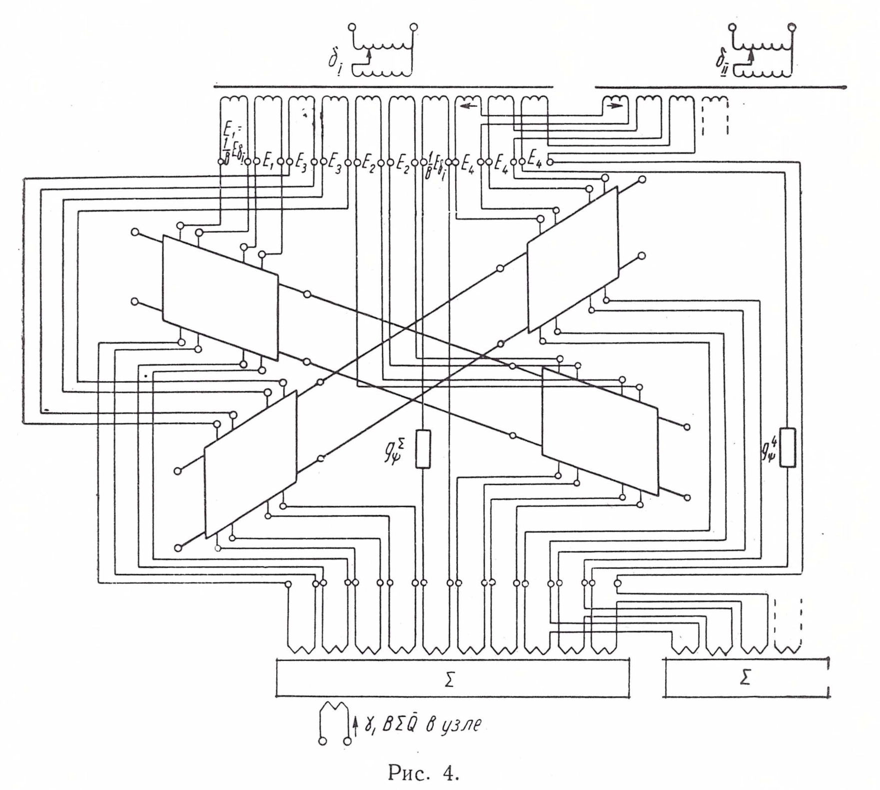



Рис. 4.

Электрическая модель одного узла (1) системы перекрестных балок показана на рис. 4 (на схеме условно не показаны диодные мосты). Здесь равновесие по изгибающим моментам и углам поворота концевых сечений стержней реализуется в пределах одной плоскости, а связи по поперечным силам и вертикальным смещениям — между плоскостями. При этом учтено, что:

$$\delta_A^1 = \delta_A^3 = \delta_B^2 = \delta_A^5 = \delta_B^6 = \delta_B^7 = 0,$$

$$\delta_B^1 = \delta_B^3 = \delta_A^2 = \delta_A^4 = \delta_{\mathrm{I}},$$

$$\delta_B^4 = \delta_B^5 = \delta_A^6 = \delta_A^7 = \delta_{\mathrm{II}}.$$

При подключении источников э. д. с. к схемам-аналогам стержней необходимо учитывать выражение (33). Тогда величины э. д. с. $E$ для различных стержней, сходящихся в узле, равны:

$$E_1 = \frac{1}{B}(E_{\delta_I} - 0),$$

$$E_2 = \frac{1}{B}(0 - E_{\delta_I}),$$

$$E_3 = \frac{1}{B}(E_{\delta_I} - 0),$$

$$E_4 = \frac{1}{B}(E_{\delta_{II}} - E_{\delta_I}).$$

Эти величины э. д. с. подаются в схемы-аналоги соответствующих стержней. Уравнения равновесия по поперечным силам в каждом подвижном узле реализуется с помощью сумматора-сравнителя, на который со схем-аналогов подаются токи (29), а с дополнительной цепи (рис. 1) для каждой схемы-аналога необходимо подать на сумматор ток (32). В нашем случае, учитывая отсутствие перемещений опор стержней *1*, *2*, и *3*, этот ток для стержней *1*, *2* и *3* может быть задан с одного источника э. д. с. $\frac{1}{B}E_{\delta_I}$ и суммарная проводимость $g_\psi^\Sigma$ с учетом знаков $E_1$, $E_2$ и $E_3$ будет равна:

$$g_\psi^\Sigma = g_\psi^1 - g_\psi^2 + g_\psi^3.$$

Дополнительный источник тока (32) для стержня 4 равен $E_4 = \frac{1}{B}(E_{\delta_{II}} - E_{\delta_I})$. На сумматор-сравнитель, кроме токов (29) и (32), величины которых неизвестны и меняются в процессе уравновешивания системы, подается известный неизменяемый в процессе уравновешивания системы ток, моделирующий $\Sigma\overline{Q}$ — сумму поперечных сил в узле в случае, когда концы стрежней, сходящихся в узле, жестко защемлены.

Предложенный метод моделирования позволяет сократить более чем в два раза количество проводимостей и в 3—4 раза количество электронных усилителей.

Так при моделировании шестипролетной неразрезной балки на упруго смещающихся опорах [6] количество электронных усилителей равно 24, а при моделировании с использованием сумматоров-сравнителей количество реверсивных магнитных усилителей равно 7 — по одному на каждую опору.

Особенно уменьшается количество суммирующих элементов при электромоделировании систем перекрестных балок, где на каждый подвижной узел требуется только по одному реверсивному магнитному усилителю.

Предлагаемые схемы-аналоги с использованием сумматоров-сравнителей, выполненных на базе реверсивных магнитных усили-

телей, позволяют при небольшом количестве электрической цепи и при автоматическом уравновешивании системы расширить круг задач, решаемых при электромоделировании чисто машинным образом.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Рабинович И. М. Курс строительной механики. Ч. II, Госстройиздат, М., 1956.
2. Пухов Г. Е. Избранные вопросы теории математических машин. Изд-во АН УССР, К., 1964.
3. Пухов Г. Е., Васильев В. В., Степанов А. Е., Токарева О. Н. Электрическое моделирование задач строительной механики. Изд-во АН УССР, К., 1963.
4. Керопян К. К., Чеголин П. М. Электрическое моделирование в строительной механике. Госиздат литературы по строительству, архитектуре и стройматериалам. М., 1963.
5. Степанов А. Е., Токарева О. Н.— В кн.: Математическое моделирование и электрические цепи. Вып. II. Изд-во АН УССР, К., 1964.
6. Степанов А. Е., Токарева О. Н., Лабинова Н. М., Рублевский Н. Т.— В кн.: Математическое моделирование и теория электрических цепей. Вып. III, «Наукова думка», К., 1965.
7. Овсянко В. М.— Настоящий сборник, 222.

Доложено на семинаре
24 декабря 1965 г.

# СХЕМА-АНАЛОГ СИММЕТРИЧНОГО ИЗГИБАЕМОГО СТЕРЖНЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО ОЧЕРТАНИЯ

В. М. ОВСЯНКО

При расчетах рамных систем нередко встречаются случаи, когда часть рамы имеет криволинейное или ломаное очертание. Обычно таким образом выполняются ригели рамной системы, причем они являются симметричными относительно вертикальной оси.

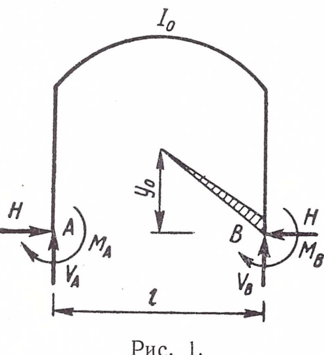


Рис. 1.

Рассмотрим симметричный элемент произвольного очертания (рис. 1), находящийся под действием какой-либо нагрузки. После деформации всего элемента от внешних воздействий узлы $A$ и $B$ повернулись на углы $\varphi_A$ и $\varphi_B$, сместились по вертикали на величины $\delta_A$ и $\delta_B$, а по горизонтали — на $\Delta_A$ и $\Delta_B$. При этом относительные вертикальные и горизонтальные перемещения запишутся так:

$$\begin{aligned} \delta &= \delta_B - \delta_A, \\ \Delta &= \Delta_B - \Delta_A. \end{aligned} \tag{1}$$

Уравнения, описывающие такой симметричный ломаный стержень, имеют вид:

$$\begin{aligned} M_A &= \frac{2EJ_0}{l}\left(2\alpha\varphi_A \mp \beta\varphi_B - \frac{3\gamma\delta}{l} - \frac{3\varepsilon_A\Delta}{l}\right) + \overline{M}_A, \\ M_B &= \frac{2EJ_0}{l}\left(\mp \beta\varphi_A + 2\alpha\varphi_B - \frac{3\gamma\delta}{l} - \frac{3\varepsilon_B\Delta}{l}\right) + \overline{M}_B, \\ V_A &= -\frac{6EJ_0}{l^2}\left(\varphi_A\gamma + \varphi_B\gamma - \frac{2\delta}{l}\gamma\right) + \overline{V}_A, \\ V_B &= \frac{6EJ_0}{l^2}\left(\varphi_A\gamma + \varphi_B\gamma - \frac{2\delta}{l}\gamma\right) + \overline{V}_B \\ H &= \frac{6EJ_0}{l^2}\left(\varepsilon_A\varphi_A + \varepsilon_B\varphi_B - \frac{\lambda\Delta}{l}\right) + \overline{H}. \end{aligned} \tag{2}$$

Уравнения получены с использованием упругого центра тяжести и коэффициенты $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\varepsilon_A$, $\varepsilon_B$, $\lambda$ записываются следующим образом:

$$\alpha = \frac{1}{4iW} + \frac{l^2}{16iJ_y} + \frac{y_0^2}{4iJ_x},$$

$$\beta = -\frac{1}{2iW} + \frac{l^2}{8iJ_y} - \frac{y_0^2}{2iJ_x},$$

$$\gamma = \frac{l^2}{12iJ_y}, \quad \varepsilon_A = -\varepsilon_B = \frac{ly_0}{6iJ_x}, \quad \lambda = \frac{l^2}{6iJ_x}, \quad i = \frac{EJ_0}{l}, \tag{3}$$

$$W = \int \frac{dS}{EJ}, \quad J_x = \int \frac{y^2 dS}{EJ}, \quad J_y = \int \frac{x^2 dS}{EJ}.$$

Учитывая, что $\varepsilon_A = -\varepsilon_B$, $V_A = Q_A$, $V_B = -Q_B$, $H_A = -Q_H$ и принимая, что

$$a = \frac{EJ_0}{l^2}, \tag{4}$$

перепишем уравнения (2) в виде, удобном для моделирования:

$$M_A = 4al\alpha\varphi_A \mp 2al\beta\varphi_B - 6a\gamma\delta - 6a\varepsilon_A\Delta + \overline{M}_A,$$

$$M_B = \mp 2al\beta\varphi_A + 4al\alpha\varphi_B - 6a\gamma\delta + 6a\varepsilon_A\Delta + \overline{M}_B,$$

$$-BQ_A = B6a\gamma\varphi_A + B6a\gamma\varphi_B - B\frac{12a\gamma\delta}{l} - B\overline{Q}_A,$$

$$-BQ_B = B6a\gamma\varphi_A + B6a\gamma\varphi_B - B\frac{12a\gamma\delta}{l} - B\overline{Q}_B,$$

$$-BQ_H = B6a\varepsilon_A\varphi_A - B6a\varepsilon_A\varphi_B - B\frac{6a\lambda\Delta}{l} - B\overline{Q}_H. \tag{5}$$

Значение коэффициента $B$ будет получено ниже.

Приведенные зависимости будем моделировать по следующей блок-схеме: первый блок выполняется как неуравновешиваемая квазианалоговая модель для решения двух уравнений, второй блок — как уравновешиваемая модель, где проверяется равенство нулю суммы слагаемых третьего и четвертого уравнений.

Моделирование по такой блок-схеме позволяет значительно сократить количество элементов, отрабатывающих нули.

Схема, показанная на рис. 2, является схемой-аналогом симметричного изгибаемого стержня произвольного очертания.

Уравнения, записанные по методу узловых потенциалов, для этой схемы-аналога имеют вид

$$I_A = \left(g_A + g_A' + \frac{g_m}{2} + \frac{g_n}{2}\right)U_A + \left(\frac{g_n}{2} - \frac{g_m}{2}\right)U_B - $$
$$- Eg_A - E'g_A' + \overline{I}_A,$$

$$I_B = \left(\frac{g_n}{2} - \frac{g_m}{2}\right)U_A + \left(g_B + g_B' + \frac{g_m}{2} + \frac{g_n}{2}\right)U_B - \tag{6}$$
$$- Eg_B + E'g_B' + \overline{I}_B.$$

Уравнения (6) подобны уравнениям моментов системы (5).

Проводимости $g_A$, $g_B$, $g'_A$, $g'_B$ подсчитаем по формулам

$$g_A = g_B = kB6a\gamma,$$
$$g'_A = g'_B = kB6a\varepsilon_A. \quad (7)$$

Проводимости $g_m$ и $g_n$ определим, исходя из подобия коэффициентов при $\varphi_A$ и $\varphi_B$ в уравнениях моментов (5) и коэффициентов при $U_A$ и $U_B$ в уравнениях токов (6):

$$g_m = k2al\,(2\alpha \pm \beta) - (g_A + g'_A),$$
$$g_n = \mp\, k4al\beta + g_m. \quad (8)$$

Рис. 2.

В проводимостях $g_m$ и $g_n$ учтено, что знак при $\beta$ может быть положительным или отрицательным.

В случае положительного коэффициента $\beta$ проводимость $g_m$ может оказаться равной нулю, а в случае отрицательного коэффициента $\beta$ проводимость $g_n$ может равняться нулю. В этих случаях значение коэффициента $B$ определяется так:

$$B = \frac{l\,(2\alpha - \beta)}{3\,(\gamma + \varepsilon_A)}. \quad (9)$$

Уравнения поперечных сил системы (5) моделируются уравнениями токов:

$$-\gamma_i BQ_A = g_A U_A + g_A U_B - 2g_A \frac{1}{B} E_\delta - \gamma_i B\overline{Q}_A,$$
$$-\gamma_i BQ_B = g_A U_A + g_A U_B - 2g_A \frac{1}{B} E_\delta - \gamma_i B\overline{Q}_B, \quad (10)$$
$$-\gamma_i BQ_H = g'_A U_A - g'_A U_B - g'_A \frac{\lambda}{\varepsilon_A l} E_\Delta - \gamma_i B\overline{Q}_H.$$

В уравнениях (7), (8), (10) $k$ и $\gamma_i$ — масштабные коэффициенты проводимостей и токов; в схеме рис. 2 источники э. д. с. $E$ и $E'$ определяются так:

$$E = \frac{1}{B} E_\delta, \quad E' = \frac{1}{B} E_\Delta, \tag{11}$$

где $E_\delta$ и $E_\Delta$ — величины э. д. с., полностью аналогичные относительному вертикальному и горизонтальному перемещениям узлов $A$ и $B$ рассматриваемого элемента (рис. 1.) Эти токи, моделирующие поперечные силы, будем отрабатывать с помощью сумматоров-сравнителей, выполненных на основе реверсивных магнитных усилителей.

На сумматоры-сравнители подаются известные токи, моделирующие поперечные силы в случае защемленных концов элемента (рис. 1), а также токи, моделирующие остальные части поперечных сил.

Рассмотрим, как можно замоделировать части токов системы (10):

$$g_A U_A + g_A U_B - 2g_A \frac{1}{l} E_\delta, \tag{12}$$

$$g'_A U_A - g'_A U_B - g'_A \frac{\lambda}{\varepsilon_A l} E_\Delta. \tag{13}$$

Вначале получим токи (12). Для этой цели подадим на сумматор-сравнитель токи, протекающие в ветвях $g_A$ и $g_B$:

$$g_A U_A + g_A U_B - 2g_A \frac{1}{B} E_\delta. \tag{14}$$

Для получения тока (12) к току (14) необходимо с дополнительной цепи с проводимостью $g_\delta$ подать в сумматор-сравнитель ток

$$2g_A E_\delta \left(\frac{l - B}{Bl}\right). \tag{15}$$

При этом проводимость $g_\delta$ имеет вид

$$g_\delta = 2g_A \left(\frac{l - B}{l}\right). \tag{16}$$

Просуммируем токи в ветвях $g'_A$ и $g'_B$:

$$g'_A U_A - g'_A U_B - 2g'_A \frac{1}{B} E_\Delta. \tag{17}$$

Для получения тока (13) к току (17) необходимо добавить ток

$$g'_A \left. \frac{2}{B} - \frac{\lambda}{\varepsilon_A l}\right) E_\Delta. \tag{18}$$

Ток (18) получается в дополнительной цепи с проводимостью

$$g_\Delta = g'_A \left(2 - \frac{\lambda B}{\varepsilon_A l}\right). \tag{19}$$

С помощью полученной схемы-аналога можно моделировать всевозможные элементы, имеющие криволинейное и ломаное очертания.

Кроме того, открываются новые возможности применения метода электроаналогий для моделирования расчета самокомпенсации плоских трубопроводов.

Рассмотрим в общих чертах моделирование системы, показанной на рис. 3.

Узлы $A$ и $B$ моделируемой системы вертикальных перемещений не имеют, поэтому в схеме-аналоге элемента $AB$ отсутствуют напряжения $E_\delta$, моделирующие относительное вертикальное перемещение узлов. Горизонтальное перемещение узлов $A$ и $B$ равно $\Delta_1$ и $\Delta_2$. При моделировании стоек рамы рис. 3 придется учитывать $A$ и $B$. В связи с этим в схемах-аналогах стоек придется провести небольшое изменение в толковании назначения источников э. д. с. $E$. Эти источники будут предназначены не для моделирования перекоса стержня, а для моделирования смещения его узлов.


Рис. 3.

Относительное смещение узлов $B$ и $A$ для элемента $AB$ будут моделироваться источниками э. д. с., полученными в результате вычитания э. д. с., моделирующих перемещение $\Delta_1$, из э. д. с., моделирующих перемещение $\Delta_2$.

Уравнения равновесия записываются и моделируются по двум сечениям I и II. В каждом уравнении будут суммироваться: распор $H$, горизонтальная нагрузка, поперечные силы в перерезанных сечением стойках.

Для моделирования сумм сил в сечениях I и II на каждое сечение предназначается один сумматор-сравнитель.

Полученная схема-аналог симметричного изгибаемого стержня позволит значительно увеличить количество задач строительной механики, рассчитываемых методом электромоделирования.

ЛИТЕРАТУРА


1. Пухов Г. Е. Избранные вопросы теории математических машин. Изд-во АН УССР, К., 1962.
2. Овсянко В. М.— Настоящий сборник, 200.
3. Овсянко В. М.— Настоящий сборник, 209.



Доложено на семинаре
4 марта 1966 г.

# О МОДЕЛИРОВАНИИ КОМБИНИРОВАННЫХ СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ НА ПЕРЕМЕННОМ ТОКЕ

Е. А. ПРОСКУРИН

В практических расчетах, особенно в расчетах производственных зданий, как правило, встречаются комбинированные конструкции из балок и ферм. Обычно при расчетах ферму рассматривают как балку, что приводит к заметным погрешностям.

В настоящей статье рассматривается одна из возможных схем на переменном токе для моделирования указанных конструкций.

На рисунке показана комбинированная стержневая конструкция и ее электрическая модель.

Электрическая модель состоит из двух частей — модели фермы и модели балки.

В модели фермы усилия, действующие в стержнях, разложены на горизонтальные и вертикальные составляющие. Этому, в свою очередь, соответствуют две электрические схемы: $X$ — для горизонтальных составляющих, $Y$ — для вертикальных. Каждому стержню, соединяющему произвольные узлы фермы, соответствуют два равных сопротивления $R$ на схемах $X$ и $Y$. Величина сопротивления определяется по формуле

$$R = \gamma_R \frac{l_{\text{ф}}^3}{EF},$$

где $\gamma_R$ — масштабный коэффициент; $l_{\text{ф}}$ — длина стержня фермы; $EF$ — жесткостной параметр стержня.

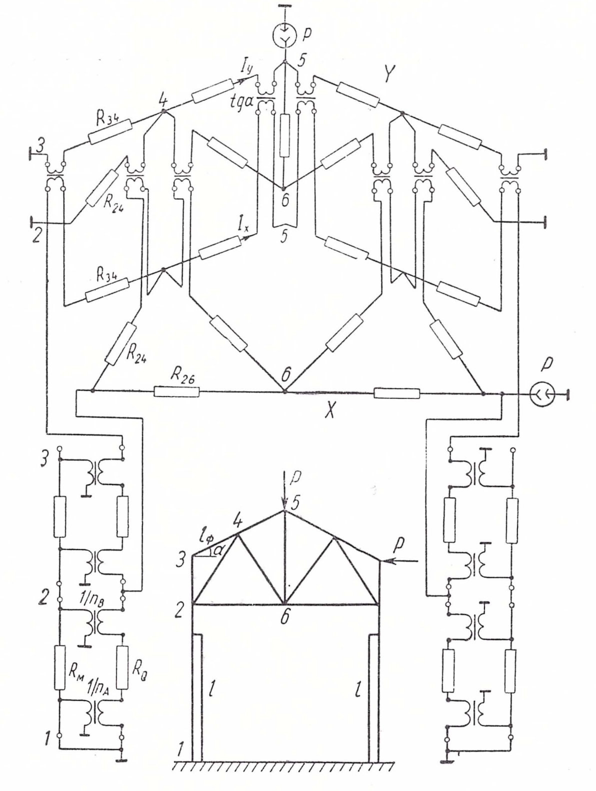
Каждое ответвление тока на схеме $X$ соединено с соответствующим ответвлением на схеме $Y$ при помощи трансформатора с таким коэффициентом трансформации, что обеспечивается отношение

$$\frac{I_Y}{I_X} = \operatorname{tg} \alpha,$$

где $I_X$ — ток в $R$ на схеме $X$; $I_Y$ — ток в $R$ на схеме $Y$; $\alpha$ — угол наклона стержня к горизонту. Величина $I_Y$ пропорциональна вертикальной составляющей усилия, а $I_X$ — горизонтальной составляющей. Отсюда следует, что если стержень горизонтален, то соответствующие точки на модели $Y$ между собой сопротивлениями не соединяются, т. е. ток между этими точками равен нулю. Аналогично, узлы, соединенные вертикальными стержнями, на модели $X$ соответствующие точки сопротивлениями не соединяются.

Внешние нагрузки задаются током в $Y$-направление, если действуют вертикально, и в $X$-направление, если действуют горизонтально.

Для определения усилий достаточно измерить пропорциональные им силы токов в элементах электрической модели. Для определения




продольных деформаций элементов фермы необходимо измерить падения напряжений на сопротивлениях.

Параметры модели балки постоянной жесткости выбираются по следующим формулам:

$$R_M = \gamma_{R_M} \frac{l}{EJ}, \quad R_Q = \gamma_{R_Q} \frac{l^3}{12EJ}, \quad n_A = n_B = \gamma_n \frac{l}{2},$$

где $l$ — длина балки; $EJ$ — жесткость балки; $n_A = n_B$ — коэффициент трансформации; $\gamma_{R_M}$, $\gamma_{R_Q}$, $\gamma_n$ — переходные масштабы.

ЛИТЕРАТУРА


1. Пухов Г. Е. Электрическое моделирование стержневых и тонкостенных конструкций. Изд-во АН УССР, К., 1960.



Доложено на семинаре
13 мая 1966 г.

# ГРАФО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ПОИСКА СВЯЗЕЙ В СТРУКТУРЕ ЛОГИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

Д. И. ПАШКО

Из динамических моделей операторного типа, т. е. таких, решающая схема которых представляет квазианалог оператора задачи, заслуживают внимания модели с логической связью проводимостей с усилителями постоянного тока. Усилители используются при этом в режиме отработки, записи и считывания узловых напряжений на запоминающих конденсаторах [1,2].

Модели имеют многоканальную структуру связи запоминающих конденсаторов с усилителями. Каждый канал представляет автономную ключевую схему и обслуживается одним усилителем. Это расширяет возможность применения в качестве ключей схем на полупроводниковых элементах. Модели отличаются большой экономичностью ключей.

В основу построения многоканальной структуры положен принцип условного группирования узлов сетки аппроксимации в блоки. Целесообразным оказывается группирование по схеме конечно-разностного оператора.

В статье предлагается метод поиска связи моделирующих коэффициенты проводимостей с усилителями каналов в зависимости от положения электрического оператора на области узлов для бигармонической задачи. Рассмотрение частного примера не накладывает ограничений на применение методики при разработке любых других моделей операторного типа.

Известная система обозначения коэффициентов тринадцатичленного конечно-разностного оператора [3] переносится на обозначение проводимостей модели.

Электрическая схема квазианалога оператора и система обозначения проводимостей приводится на рис. 1. Центральному коэффициенту соответствует проводимость $\bar{k}$, верхнему над ним — $\bar{a}$ и т. д. Система обозначения коэффициентов используется также при условном группировании узлов сетки аппроксимации. На рис. 2 приводится относительное расположение блоков и система обозначения узлов в блоках.

Запоминающие конденсаторы одноименных узлов (узлов $k$, $a$, $b$ и др.) конструктивно сводятся в отдельные группы, каждая из которых обслуживается своим усилителем. Этим достигается многоканальная структура.

Задача поиска связи проводимостей с усилителями каналов на любом шаге электрического оператора лежит в основе построения модели.

Введем некоторые обозначения:

а) признаком уровня для внутренних узлов блока будем обозначать их положение относительно центрального узла;

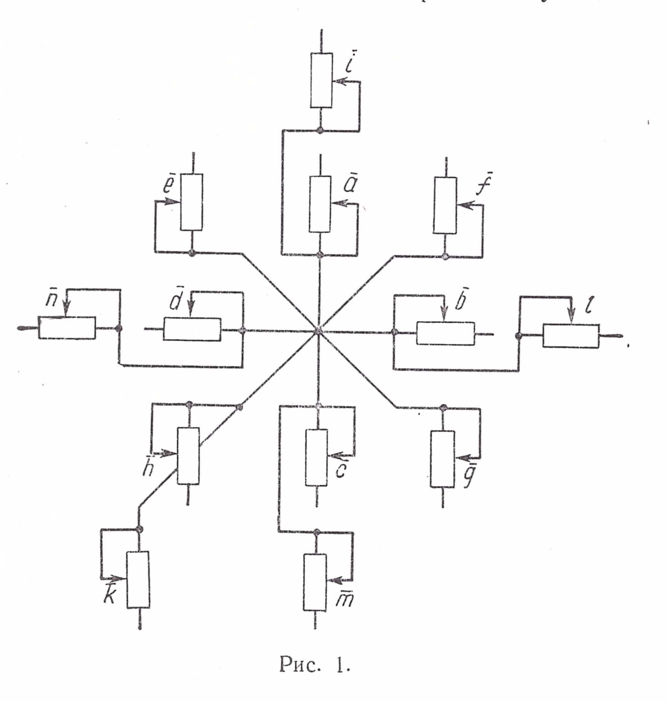



Рис. 1.

б) признаком уровня блока — положение его центрального узла $k$ относительно центрального узла блока, принятого за основной;

в) признак уровня оператора определяется положением его центрального коэффициента $\bar{k}$ над областью узлов относительно центрального узла основного блока;

г) признаком уровня коэффициента (соответствующей проводимости) в операторе обозначим его положение относительно центрального коэффициента $\bar{k}$;

д) за единицу модуля признаков принимается шаг сетки аппроксимации.

Основным на области узлов может быть выбран любой блок.

В качестве направлений системы отсчета признаков и их условных обозначений выбираются следующие:

1) направление вверх « $\uparrow$ »;
2) направление вниз « $\downarrow$ »;
3) направление вправо « $\rightarrow$ »;
4) направление влево « $\leftarrow$ »;

Система обозначения признаков:

1) «О» — признак уровня оператора;
2) «Б» — признак уровня блока;
3) «У» — признак уровня узла в блоке;
4) «К» — признак уровня коэффициента в операторе.

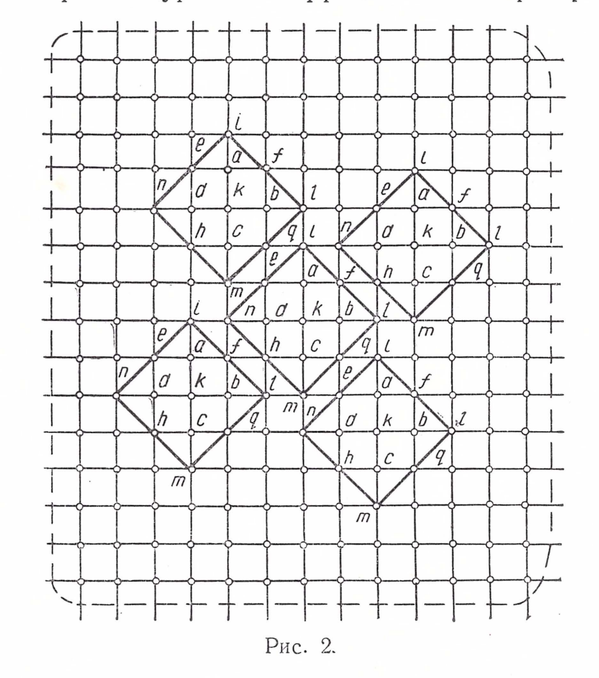



Рис. 2.

Примеры записи признаков уровня:

У0,1 $\uparrow$ — признак узла в блоке с нулевой горизонтальной составляющей и единицей вверх; $\overleftarrow{К}1,1\downarrow$ — признак коэффициента в операторе с единицей составляющей влево и единицей вниз.

В соответствии с принятыми обозначениями (рис. 1 и 2) каждый коэффициент оператора и каждый узел блока имеют постоянные признаки уровня в системе внутреннего отсчета. Признаки внутреннего отсчета для узлов и коэффициентов сведены в табл. 1. Последовательность точек перемещения оператора назовем его следом, а последовательность связей коэффициента — следом коэффициента (проводимости). Система расположения блоков характеризуется от-

Таблица 1

| Оператор | | Блок | |
|---|---|---|---|
| Коэффициенты | Признаки уровня коэффициентов | Адреса узлов | Признаки уровня узлов |
| $\bar{k}$ | К0.0 | $k$ | У0,0 |
| $\bar{a}$ | К0,1 ↑ | $a$ | У0,1 ↑ |
| $\bar{b}$ | $\overrightarrow{\text{К1,0}}$ | $b$ | $\overrightarrow{\text{У1,0}}$ |
| $\bar{c}$ | К0,1 ↓ | $c$ | У0,1 ↓ |
| $\bar{d}$ | $\overleftarrow{\text{К1,0}}$ | $d$ | $\overleftarrow{\text{У1,0}}$ |
| $\bar{e}$ | $\overleftarrow{\text{К1,1}}$ ↑ | $e$ | $\overleftarrow{\text{У1,1}}$ ↑ |
| $\bar{f}$ | $\overrightarrow{\text{К1,1}}$ ↑ | $f$ | $\overrightarrow{\text{У1,1}}$ ↑ |
| $\bar{g}$ | $\overrightarrow{\text{К1,1}}$ ↓ | $g$ | $\overrightarrow{\text{У1,1}}$ ↓ |
| $\bar{h}$ | $\overleftarrow{\text{К1,1}}$ ↓ | $h$ | $\overleftarrow{\text{У1,1}}$ ↓ |
| $\bar{i}$ | К0,2 ↑ | $i$ | У0,2 ↑ |
| $\bar{l}$ | $\overrightarrow{\text{К2,0}}$ | $l$ | $\overrightarrow{\text{У2,0}}$ |
| $\bar{m}$ | К0,2 ↓ | $m$ | У0,2 ↓ |
| $\bar{n}$ | К2,0 | $n$ | $\overleftarrow{\text{У2,0}}$ |

носительной смежностью. Смежными к любому блоку $j$ считаются блоки с минимальными относительно $j$ признаками уровней:

$$\overleftarrow{\text{Б2,3}} \uparrow_{j,\,c}; \quad \overrightarrow{\text{Б3,2}} \uparrow_{j,\,c};$$

$$\overleftarrow{\text{Б3,2}} \downarrow_{j,\,c}; \quad \overrightarrow{\text{Б2,3}} \downarrow_{j,\,c}, \quad (1)$$

где $j$, $c$ — индексы обозначения признака смежного к блоку $j$.

Связь между признаками уровня оператора, блока, коэффициента и узла может быть установлена по рис. 2 и табл. 1. Пусть оператор получил признак О0,2 ↑. Тогда коэффициент получит связь с узлом, признак уровня которого будет

$$\overleftrightarrow{\text{У}m,n} \Updownarrow = \text{О0,2} \uparrow + \text{К0,1} \uparrow = \text{У0,3} \uparrow, \quad (2)$$

где К0,1 ↑ признак уровня коэффициента $\bar{a}$ (см. табл. 1).

Полученный по уравнению (2) признак выходит за массив признаков уровня основного блока. Очевидно, что узел связи находится в смежном к основному блоку, а именно, в блоке $\overleftarrow{\text{Б2,3}} \uparrow_{\text{о.с}}$. При выборе другого смежного блока результат решения уравнения (3) окажется вне его массива узлов. Признак уровня узла связи можно найти из выражения

$$\overleftrightarrow{\text{У}m,n} \Updownarrow = \text{О0,2} \uparrow + \text{К0,1} \uparrow - \overleftarrow{\text{Б2,3}} \uparrow_{\text{о. с}} = \overrightarrow{\text{У2,0}}. \quad (3)$$

Из табл. 1 следует, что данному признаку соответствует узел $l$, т. е. коэффициент $\bar{a}$ получает связь с усилителем канала $l$. Уравне-

ние (3) в общем виде

$$\overset{\leftrightarrows}{\text{У}m,n}\uparrow\downarrow = \overset{\leftrightarrows}{\text{О}m,n}\uparrow\downarrow + \overset{\leftrightarrows}{\text{К}m,n}\uparrow\downarrow - \overset{\leftrightarrows}{\text{Б}m,n}\uparrow\downarrow$$

является основным уравнением поиска связи. Независимой переменной здесь является признак оператора $\overset{\leftrightarrows}{\text{О}m}, n\uparrow\downarrow$, признак $\overset{\leftrightarrows}{\text{К}m}, n\uparrow\downarrow$ для каждого коэффициента остается постоянным. Признак блока $\overset{\leftrightarrows}{\text{Б}m}, n\uparrow\downarrow$ относительно просто находится, если поиск следа связи коэффициента ведется от основного блока. При этом переход связи из одного блочного массива узлов в другой определяется по результату решения уравнения поиска. Если признак оператора получил единичное изменение и результат решения уравнения (4) находится в пределах возможных внутриблочных признаков (табл. 1), то связь остается в массиве обследуемого блока. Если результат решения выходит из массива внутриблочных признаков, то коэффициент получает связь с узлом смежного блока. Связь оказывается в том смежном блоке, составляющие которого имеют направления, совпадающие с направлениями соответствующих составляющих в результате решения уравнения (4). Если в решении какая-либо составляющая равна нулю, то выбирается блок с меньшей по модулю соответствующей составляющей. При поиске следа для коэффициентов с признаком

$$\overset{\leftrightarrows}{\text{К}m,n}\uparrow\downarrow = \text{К}0,2\uparrow\downarrow,$$

$$\overset{\leftrightarrows}{\text{К}m,n}\uparrow\downarrow = \overset{\leftrightarrows}{\text{К}2,0}$$

возможны двойные переходы к смежным блокам. Сказанное следует из относительного расположения блоков по узлам области.

Рассмотрим метод на примере поиска следа коэффициента $\overline{a}$.

*Первый шаг*. Признак оператора О0,0.

Уравнение поиска

$$\text{О}0,0 + \text{К}0,1\uparrow - \text{Б}0,0 = \text{У}0,1\uparrow$$

дает признак уровня, которому соответствует узел связи $a$ (из табл. 1), т. е. коэффициент $\overline{a}$ получает связь с усилителем канала $a$.

*Второй шаг*. Оператор получает признак О0,1 ↑.

Уравнение поиска

$$\text{О}0,1\uparrow + \text{К}0,1\uparrow - \text{Б}0,0 = \text{У}0,2\uparrow$$

приводит к узлу связи $i$ (усилитель канала $i$).

*Третий шаг*. Признак оператора О0,2 ↑.

Уравнение поиска

$$\text{О}0,2\uparrow + \text{К}0,1\uparrow - \text{Б}0,0 = \text{У}0,3\uparrow$$

дает признак, который выходит за массив узлов основного блока (по табл. 1, за массив внутриблочных признаков).

По результату $У0,3\uparrow$ из выражения (1) может быть выбран смежный блок. Его признак должен иметь меньшую из горизонтальных составляющих и вертикальную составляющую с направлением «$\uparrow$».

Таким блоком является $Б\overleftarrow{2},3\uparrow_{о.с}$. Признак смежного блока в общей системе отсчета (относительно центра основного блока) определяется из выражения

$$Б\overset{\leftrightarrows}{m,n}\Updownarrow_{j,\,с} + Б\overset{\leftrightarrows}{m.n}\Updownarrow_{j} = Б\overset{\leftrightarrows}{m,n}\Updownarrow .$$

При этом $Б\overset{\leftrightarrows}{m,n}\Updownarrow_{j}$ — обследуемый на предыдущем шаге блок, а $Б\overset{\leftrightarrows}{m,n}\Updownarrow_{j,с}$ — смежный к нему. В данном случае обследуемым на предыдущем шаге был основной, тогда

$$Б\overleftarrow{2},3\uparrow_{о.\,с} + Б0,0_{0} = Б\overrightarrow{2},3\uparrow .$$

Из уравнения поиска

$$О0,2\uparrow + К0,1\uparrow - Б\overleftarrow{2},3\uparrow = У\overrightarrow{2},0$$

получаем признак узла $l$, т. е. коэффициент $\bar{a}$ получает связь с усилителем канала $l$.

*Четвертый шаг*. Оператор имеет признак $О0,3\uparrow$.

По уравнению поиска

$$О0,3\uparrow + К0,1\uparrow - Б\overleftarrow{2},3\uparrow = У\overrightarrow{2},1\uparrow$$

получаем признак, который вышел за массив узлов обследуемого ($Б\overleftarrow{2},3\uparrow$) блока. Поиск следует вести в смежном к нему блоке $Б\overrightarrow{3},2\uparrow_{с}$. Признак этого блока относительно основного

$$Б\overrightarrow{3},2\uparrow_{с} + Б\overleftarrow{2},3\uparrow = Б\overrightarrow{1},5\uparrow .$$

Уравнение поиска

$$О0,3\uparrow + К0,1\uparrow - Б\overrightarrow{1},5\uparrow = У\overleftarrow{1},1\downarrow$$

дает признак узла связи $h$.

Дальнейший поиск связи коэффициента $\bar{a}$ состоит в повторении описанных операций на каждом шаге оператора. Результат поиска сведен в табл. 2.

После тринадцатого шага (признак оператора $О0,12\uparrow$) результат поиска связей коэффициента $\bar{a}$ в направлении $О0,n\uparrow$ повторяется. Это имеет место и для остальных основных направлений.

Данные табл. 2 представляют собой один интервал следа коэффициента $\bar{a}$ в поле периодизации связей. Начало следующего ин-

Таблица 2

| Признак уровня оператора | Уравнение поиска в О0, $n\uparrow$ | Адрес связи |
|---|---|---|
| 00,0 ↑ | О0,0 +К0,1 ↑ —Б0,0 —У0,1 ↑ | *a* |
| 00,1 ↑ | О0,1 ↑ +К0,1 ↑ —Б0,0 =У,2 ↑ | *i* |
| 00,2 ↑ | О0,2 ↑ +К0,1 ↑ —$\overleftarrow{\text{Б2,3}}$ ↑ —$\overrightarrow{\text{У2,0}}$ | *l* |
| 00,3 ↑ | О0,3 ↑ +К0,1 ↑ —$\overrightarrow{\text{Б1,5}}$ ↑ =$\overleftarrow{\text{У1,1}}$ ↓ | *h* |
| 00,4 ↑ | О0,4 ↑ +К0,1 ↑ —$\overrightarrow{\text{Б1,5}}$ ↑ =$\overleftarrow{\text{У1,0}}$ | *d* |
| 00,5 ↑ | О0,5 ↑ +К0,1 ↑ —$\overrightarrow{\text{Б1,5}}$ ↑ =$\overleftarrow{\text{У1,1}}$ ↑ | *e* |
| 00,6 ↑ | О0,6 ↑ +К0,1 ↑ —$\overleftarrow{\text{Б1,8}}$ ↑ =$\overrightarrow{\text{У1,1}}$ ↓ | *g* |
| 00,7 ↑ | О0,7 ↑ +К0,1 ↑ —$\overleftarrow{\text{Б1,8}}$ ↑ =$\overrightarrow{\text{У1,0}}$ | *b* |
| 00,8 ↑ | О0,8 ↑ +К0,1 ↑ —$\overleftarrow{\text{Б1,8}}$ ↑ —$\overrightarrow{\text{У1,1}}$ ↓ | *f* |
| 00,9 ↑ | О0,9 ↑ +К0,1 ↑ —$\overrightarrow{\text{Б2,10}}$ ↑ =$\overleftarrow{\text{У2,0}}$ | *n* |
| 00,10 ↑ | О0,10 ↑ +К0,1 ↑ —Б0,13 ↑ =У0,2 ↓ | *m* |
| 00,11 ↑ | О0,11 ↑ +К0,1 ↑ —Б0,13 ↑ =У0,1 ↓ | *c* |
| 00,12 ↑ | О0,12 ↑ +К0,1 ↑ —Б0,13 ↑ =У0,0 | *k* |
| 00,13 ↑ | О0,13 ↑ +К0,1 ↑ —Б0,13 ↑ =У0,1 ↑ | *a* |

тервала имеет признак О$\overleftarrow{1}$,0. Его связи в направлении О0, $n\uparrow$ могут быть найдены изложенным выше способом. Последовательным поиском связей по интервалам можно построить полный след коэффициента в поле периодизации.

Возможен и более экономичный путь поиска связей. Можно показать, что последовательность их в любом интервале следа $\overset{\leftrightarrows}{Om}_{const}$, $n\uparrow_{var}$ остается постоянной, полученной для коэффициента $\bar{a}$ и приведенной в табл. 2. Действительно, внутри блока последовательность для одного направления не изменяется: в любом блоке за узлом $c$ следует $k$, затем $a$. Не изменяется она и на участках перехода

от блока к блоку, что вытекает из самой системы относительного расположения блоков. Поэтому последовательность связей удобно представить в виде замкнутого графа. На рис. 3 приводятся два графа: для направления $\overset{\leftrightarrows}{O}m_{const}$, $n\downarrow_{var}$ и направления $\overset{\leftrightarrows}{O}m_{const}$, $n\uparrow_{var}$. Отличаются они последовательностью связей, которая указывается стрелками. Воспользоваться графом можно после того, как будет найдена связь коэффициента в начале интервалов. Для этого целесообразно

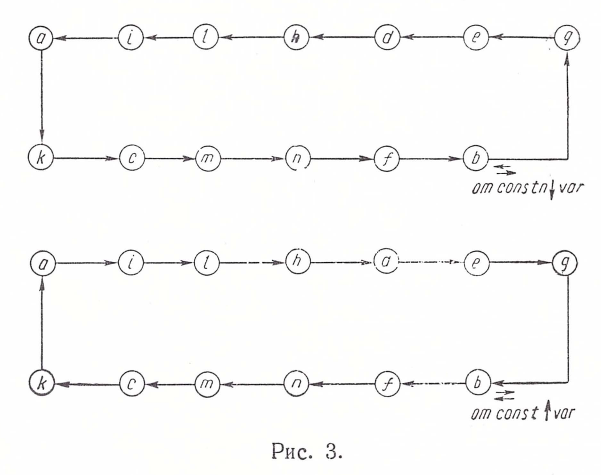



Рис. 3.

лесообразно произвести поиск связей в направлении начальных узлов, в данном случае — в направлении $\overset{\leftarrow}{O}m$, 0. В результате получим последовательность связей коэффициента $\bar{a}$, начиная с признака О0,0 и до $\overset{\rightarrow}{O}13,0$ соответственно:

$$a,\ e,\ m,\ l,\ b,\ k,\ d,\ n,\ i,\ g,\ c,\ h,\ f,\ a.$$

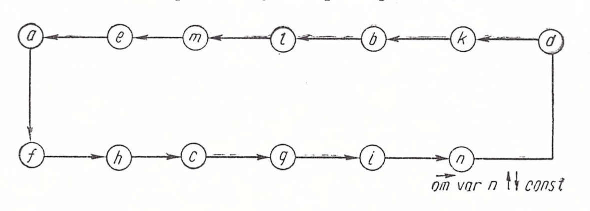
Интервалы следа коэффициента получаются путем развертки графов $\overset{\leftrightarrows}{O}m_{const}$, $n\uparrow_{var}$ и $\overset{\leftrightarrows}{O}m_{const}$, $n\downarrow_{var}$ от начальных узлов связи: для первого интервала (признак начального узла О0,0) от узла $a$, для второго ($\overset{\leftarrow}{O}1,0$) от узла $e$, для третьего ($\overset{\leftarrow}{O}2,0$) от узла $m$ и т. д. Таким образом, будет получена вся полуплоскость связи коэффициента $\bar{a}$. Как видно из рис. 4, последовательность узлов также может быть представлена графом $\overset{\leftarrow}{O}m_{var}$, $n\Updownarrow_{const}$. Обратная последовательность изображается графом $\overset{\rightarrow}{O}m_{var}$, $n\Updownarrow_{const}$.

С помощью полученных графов находится связь для любого коэффициента на любом шаге оператора. При этом каждый из четырех графов можно использовать как для задания начальных узлов ин-

тервалов, так и для получения последовательности связей в интервале. По двум графам определяется поле связи одного из четырех квадрантов основной системы отсчета признаков с центром в узле $k$ основного блока.

Порядок построения области связи для любого коэффициента с помощью графов предполагает следующие этапы:

1. Задание квадранта поиска связей.
2. Выбор графа начальных узлов связи в интервалах.
3. Выбор графа последовательности связей в интервалах.
4. Определение по графу последовательности начальных узлов, основанное на том, что признаку оператора О0,0 соответствует связь



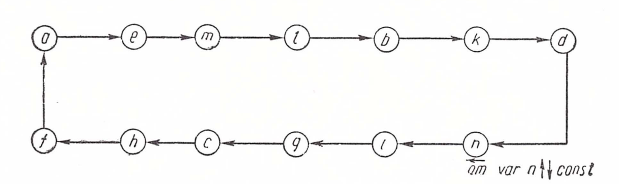




Рис. 4.

коэффициента с одноименным узлом: коэффициент $\overline{k}$ с узлом $k$; коэффициент $\overline{a}$ с узлом $a$ и т. д. Единичному изменению признака оператора в направлении развертки графа соответствует единичный переход в последовательности связей. Таким образом, граф начальных узлов разворачивается от одноименного с коэффициентом узла (признак оператора О0,0) и задает начальные узлы интервалов.

5. По полученным начальным узлам производится развертка графа интервалов.

6. Полученные результаты поиска сводятся в таблицы связи коэффициентов (проводимостей) оператора с усилителями каналов и используются при построении модели.

П р и м е р. Построим массив связей с помощью графов.

Найдем след коэффициента $l$ в третьем квадранте. В качестве графа начальных узлов выберем $\overleftarrow{Om}_{var}$, $n \Updownarrow_{const}$. Графом интервалов будет $\overleftrightarrows{Om}_{const}$, $n \downarrow_{var}$. Для признака оператора О0,0 разворачиваем $\overleftrightarrows{Om}_{const}$, $n \downarrow_{var}$ от узла $l$, получим первый интервал. След второго

интервала начинается от узла $b$ (признак оператора $\overleftarrow{O}1,0$) и задается графом интервалов $\overleftrightarrows{Om}_{const}, n\downarrow_{var}$, третьего интервала — от узла $k$ (по графу $\overleftarrow{Om}_{var}, n1\downarrow_{const}$) и т. д.

Изложенную методику поиска связей коэффициентов с усилителями каналов можно применить при построении логики оператора для любой другой модели операторного типа.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Пухов Г. Е. — Кибернетика, 1965, 2.
2. Борковский Б. А., Пухов Г. Е. — В кн.: Математическое моделирование и электрические цепи. Вып. IV. «Наукова думка», К., 1966.
3. Жемочкин Б. Н. Теория упругости, Госстройиздат, М., 1957.



Доложено на семинаре
4 февраля 1966 г.

# ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

А. Е. СТЕПАНОВ, Т. Г. ХАРЧЕНКО, Н. Т. РУБЛЕВСКИЙ

Расчет пологих оболочек при простейших граничных условиях связан с решением системы дифференциальных уравнений четвертого порядка в частных производных. Такая система при конечно-разностной аппроксимации сводится к системе линейных алгебраических уравнений высокого порядка, обычно решаемых на цифровых машинах.

Значительный интерес представила бы возможность решать такие оболочки на аналоговых машинах, а в частности, на сеточных моделях.

Напряженно деформированное состояние пологой моментной оболочки, согласно теории В. З. Власова [1], описывается системой уравнений вида:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + (k_1 + \mu k_2) \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1-\mu^2}{E\delta} X,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (k_2 + \mu k_2) \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1-\mu^2}{E\delta} Y,$$

$$(k_1 + \mu k_2) \frac{\partial u}{\partial x} + (k_2 + \mu k_1) \frac{\partial v}{\partial y} + (k_1^2 + 2\mu k_1 k_2 + k_2^2) w + \quad (1)$$

$$+ \frac{\delta^2}{12} \nabla^4 w = \frac{1-\mu^2}{E\delta} Z,$$

где $u$, $v$, $w$ — перемещения в направлении осей; $k_1$, $k_2$ — главные кривизны; $\delta$ — толщина оболочки; $\mu$ — коэффициент Пуассона; $E$ — модуль упругости; $X$, $У$, $Z$ — составляющие нагрузки по координатным осям.

Систему (1) при конечно-разностной аппроксимации, если пользоваться общепринятыми приемами записи уравнений в частных производных через значения искомых функций в узлах сеточной области, можно представить как систему $3n$ зависимых алгебраических уравнений, по числу неизвестных $(u, v, w)$ в каждом из $n$ узлов сетки.

В данной работе предлагается следующий способ моделирования пологих оболочек на сеточных моделях: конечно-разностные уравнения рассматриваемой задачи записываются таким образом, чтобы система $3n$ совместных уравнений распалась на несколько независимых систем с меньшим числом неизвестных. При этом имеет смысл использовать так называемые перекрещивающиеся сетки, что позволит ограничиться решением лишь одной независимой системы порядка $n$.

При моделировании уравнений (1) удобно выбрать систему, соответствующую сеточной области, приведенной на рис. 1, *б*. В узлах пунктирной сетки определяются перемещения $w$, в узлах пересечения вертикальных пунктирных линий со сплошными — перемещения $v$, а в узлах пересечения горизонтальных пунктирных линий со сплошными — $u$. При такой конечно-разностной аппроксимации удобно план оболочки разбивать на квадратные блоки размером $h \times h$. Узлы $u$, в которых определяются перемещения $u$, намечаются посредине граней, параллельных оси $oy$; узлы $v$ — посредине граней, параллельных оси $ox$; узлы $w$ — в центре блоков.

Особенностью предлагаемого способа является то, что для каждого узла, содержащего неизвестное перемещение, составляется лишь одно разностное уравнение. Так, в узлах, содержащих $u$, выполняется первое уравнение системы (1), в узлах, содержащих $v$ — второе, а в узлах с $w$ — третье.

Системе (1) соответствуют следующие конечно-разностные уравнения:

$$u_2 + u_4 - 2u_0 + \frac{1-\mu}{2}(u_1 + u_3 - 2u_0) + \frac{1+\mu}{2}(v_{17} - v_{18} + v_{19} - v_{20}) + h(k_1 + \mu k_2)(w_{15} - w_{13}) = h^2 \frac{1-\mu^2}{E\delta} X_0,$$

$$v_1 + v_3 - 2v_0 + \frac{1-\mu}{2}(v_2 + v_4 - 2v_0) + \frac{1+\mu}{2}(u_{17} - u_{18} + u_{19} - u_{20}) + h(k_2 + \mu k_1)(w_{14} - w_{16}) = h^2 \frac{1-\mu^2}{E\delta} Y_0, \tag{2}$$

$$h(k_1 + \mu k_2)(u_{15} - u_{13}) + h(k_2 + \mu k_1)(v_{14} - v_{16}) + h^2(k_1^2 + 2\mu k_1 k_2 + k_2^2) w_0 + \frac{1}{h^2} \cdot \frac{\delta^2}{12}[20 w_0 - 8(w_1 + w_2 + w_3 + w_4) + 2(w_5 + w_6 + w_7 + w_8) + w_9 + w_{10} + w_{11} + w_{12}] = h^2 \frac{1-\mu^2}{E\delta} Z_0,$$

где $h$ — шаг сетки (рис. 1, *а*).

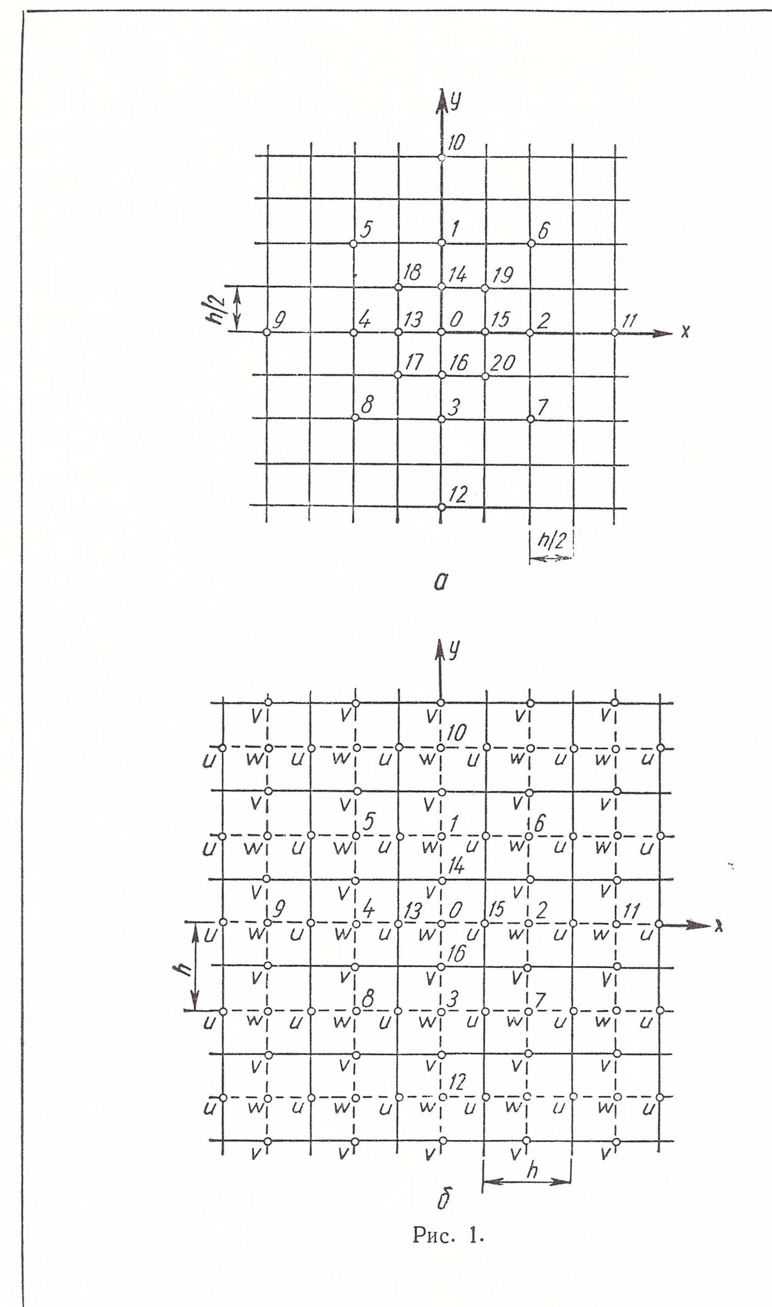



Рис. 1.

Применяя уравнения (2) с учетом граничных условий последовательно к каждому узлу сетки, получим полную систему конечно-разностных уравнений для любой области.

Рассмотрим для примера пологую оболочку с шарнирным опиранием по контуру и нагруженную вертикальной равномерно рас-

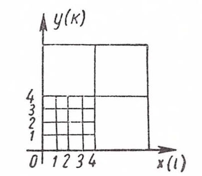



Рис. 2.

пределенной нагрузкой. Геометрические характеристики оболочки такие:

$$a = b = 8h\,, \quad c_1 = c_2 = \frac{f_1}{a} = \frac{f_2}{b} = \frac{1}{20}\,, \ \mu = 0{,}3, \ \varepsilon = \frac{\delta}{a} = \frac{1}{150}\,,$$

$$k_1 = \frac{8f_1}{a}\,, \quad k_2 = \frac{8f_2}{b}\,, \quad \frac{1-\mu}{2} = 0{,}345\,, \quad \frac{1+\mu}{2} = 0{,}655\,,$$

$$h(k_1 + \mu k_2) = 0{,}0655, \quad h^2(k_1^2 + 2\mu k_1 k_2 + k_2^2) = 0{,}0655,$$

$$\frac{\delta^2}{12h^2} = 0{,}00023704, \quad k_1 = k_2 = \frac{0{,}05}{h}.$$

Так как в плане оболочки квадрат, то перемещения будем вычислять для первой четверти плана (рис. 2), разбив ее на 16 блоков размером $h \times h$. Законтурные точки при конечно-разностной аппроксимации исключаем с помощью граничных условий.

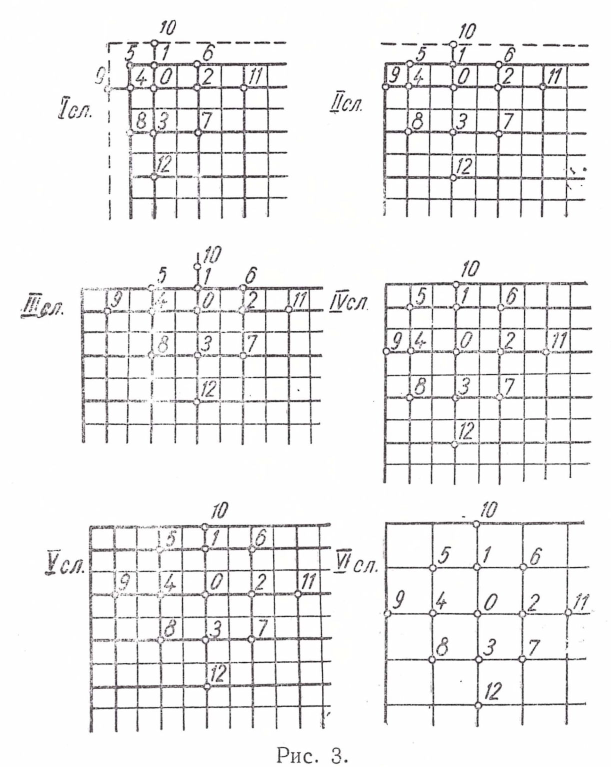



Рис. 3.

На стороне контура $x = 0$: прогиб $w = 0$, изгибающий момент $M_1 = 0$, продольное усилие $N_1 = 0$, перемещение вдоль оси $oy$ $v = 0$. На стороне $y = 0$: прогиб $w = 0$, изгибающий момент $M_2 = 0$, продольное усилие $N_2 = 0$, перемещение вдоль оси $ox$ $u = 0$.

Из условия $M_1 = M_2 = 0$ и $w = 0$ следует, что $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$. При конечно-разностной аппроксимации этого выражения получим, что значение прогиба $w$ в законтурной точке будет равно значению прогиба в предконтурной точке только с обратным знаком, т. е. $w_{з.к} = -w_{п.к}$. Также из условия $N_1 = N_2 = 0$ следует, что $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, откуда $u_{з.к} = u_{п.к}$ вдоль оси $ox$, а $v_{з.к} = v_{п.к}$ вдоль оси $oy$.

Из первого уравнения системы (1) с учетом приведенных условий следует, что $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, откуда $u_{з.к} = - u_{п.к}$ вдоль оси $oy$.

Из второго уравнения системы (1) следует, что $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$, откуда $v_{з.к} = - v_{п.к}$ вдоль оси $ox$.

После исключения законтурных точек записываются уравнения (2) последовательно для каждой точки рассматриваемой области. В итоге получим систему 48 линейных алгебраических уравнений.

При записи бигармонического оператора $\nabla^4 w$ в конечных разностях для предконтурных точек (рис. 2) надо учитывать, что шаг сетки аппроксимации не $h$, а $h/2$. На рис. 3 приведены все возможные виды бигармонического оператора в зависимости от выбора его центральной точки.

Полученная система 48 линейных алгебраических уравнений была записана и решена для следующих случаев:

а) шаг сетки аппроксимации неравномерный и бигармонический оператор только для предконтурных точек имеет вид (сл. III):

$$\nabla^4 (0) = \frac{1}{h^4}\Big(50w_0 - \frac{128}{3} w_1 - 12w_2 - \frac{40}{3} w_3 - 12w_4 + \frac{16}{3} w_5 + \frac{16}{3} w_6 + \frac{8}{3} w_7 + \frac{8}{3} w_8 + w_9 + \frac{32}{3} w_{10} + w_{11} + \frac{4}{3} w_{12}\Big);$$

б) шаг сетки аппроксимации неравномерный и оператор изменяется в зависимости от того, где находится его нулевая точка (сл. I, II, III, IV, V):

I сл. $$\nabla^4 (0) = \frac{1}{h^4}\Big(88w_0 - \frac{160}{3} w_1 - \frac{56}{3} w_2 - \frac{56}{3} w_3 - \frac{160}{3} w_4 + \frac{128}{9} w_5 + \frac{64}{9} w_6 + \frac{32}{9} w_7 + \frac{64}{9} w_8 + \frac{32}{3} w_9 + \frac{32}{3} w_{10} + \frac{4}{3} w_{11} + \frac{4}{3} w_{12}\Big);$$

II сл. $$\nabla^4 (0) = \frac{1}{h^4}\Big(\frac{151}{3} w_0 - \frac{128}{3} w_1 - 12w_2 - \frac{40}{3} w_3 - 14w_4 + \frac{16}{3} w_5 + \frac{16}{3} w_6 + \frac{8}{3} w_7 + \frac{8}{3} w_8 + \frac{8}{3} w_9 + \frac{32}{3} w_{10} + w_{11} + \frac{4}{3} w_{12}\Big);$$

IV сл. $$\nabla^4 (0) = \frac{1}{h^4}\Big(\frac{62}{3} w_0 - 10w_1 - 8w_2 - 8w_3 - 10w_4 + 2w_5 + 2w_6 + 2w_7 + 2w_8 + \frac{8}{3} w_9 + \frac{8}{3} w_{10} + w_{11} + w_{12}\Big);$$

V сл. $$\nabla^4 (0) = \frac{1}{h^4}\Big(\frac{61}{3} w_0 - 10w_1 - 8w_2 - 8w_3 - 8w_4 + 2w_5 + 2w_6 + 2w_7 + 2w_8 + w_9 + \frac{8}{3} w_{10} + w_{11} + w_{12}\Big);$$

Таблица 1

| Перемещения | $k$ \ $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $u$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 1 | 22,816 | 20,499 | 16,027 | 6,6458 | 0 |
| | 2 | 48,183 | 34,774 | 26,059 | 12,080 | 0 |
| | 3 | 50,236 | 44,806 | 29,596 | 13,933 | 0 |
| | 4 | 63,529 | 50,236 | 31,449 | 14,750 | 0 |
| $v$ | 0 | 0 | 22,816 | 48,183 | 50,236 | 63,528 |
| | 1 | 0 | 20,499 | 34,774 | 44,806 | 50,236 |
| | 2 | 0 | 16,027 | 26,059 | 29,596 | 31,449 |
| | 3 | 0 | 6,6458 | 12,080 | 13,933 | 14,750 |
| | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $w$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 1 | 0 | 132,259 | 185,627 | 226,0 | 304,338 |
| | 2 | 0 | 185,021 | 266,131 | 445,626 | 471,319 |
| | 3 | 0 | 226,136 | 445,627 | 478,285 | 467,655 |
| | 4 | 0 | 34,326 | 476,309 | 467,645 | 450,394 |
| Добавочный множитель | | $0{,}01412\,\frac{qab}{E\cdot\delta}$ | | | | |

Таблица 2

| Перемещения | $k$ \ $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $u$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 1 | 18,631 | 13,642 | 7,579 | 3,283 | 0 |
| | 2 | 45,915 | 34,929 | 20,164 | 8,943 | 0 |
| | 3 | 61,073 | 47,513 | 28,250 | 12,790 | 0 |
| | 4 | 67,638 | 53,172 | 32,097 | 14,691 | 0 |
| $v$ | 0 | 0 | 18,631 | 45,916 | 61,074 | 67,640 |
| | 1 | 0 | 13,642 | 34,929 | 47,513 | 53,173 |
| | 2 | 0 | 7,579 | 20,163 | 28,150 | 32,096 |
| | 3 | 0 | 3,283 | 8,942 | 12,789 | 14,691 |
| | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $w$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 1 | 0 | 152,320 | 260,310 | 272,630 | 270,969 |
| | 2 | 0 | 260,310 | 450,840 | 465,400 | 458,320 |
| | 3 | 0 | 272,620 | 465,400 | 472,070 | 460,990 |
| | 4 | 0 | 270,960 | 458,290 | 460,990 | 448,580 |
| Добавочный множитель | | $0{,}01412\,\frac{qab}{E\cdot\delta}$ | | | | |

в) шаг сетки аппроксимации $h$ постоянный и тогда существует два ряда законтурных точек (рис. 2), а бигармонический оператор имеет вид (сл. VI):

$$\nabla^4 (0) = \frac{1}{h^4} [20w_0 - 8 (w_1 + w_2 + w_3 + w_4) + 2 (w_5 + w_6 + w_7 + w_8) + w_9 + w_{10} + w_{11} + w_{12}] .$$

Результаты решения приведены в табл. 1—3.

Таблица 3

| Перемещения | k \ i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $u$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 1 | 20,494 | 14,074 | 7,636 | 3,284 | 0 |
| | 2 | 48,641 | 35,272 | 20,103 | 8,908 | 0 |
| | 3 | 63,914 | 47,738 | 28,116 | 12,736 | 0 |
| | 4 | 70,483 | 53,336 | 31,904 | 14,634 | 0 |
| $v$ | 0 | 0 | 20,494 | 48,641 | 63,914 | 70,484 |
| | 1 | 0 | 14,074 | 35,272 | 47,738 | 53,336 |
| | 2 | 0 | 7,636 | 20,103 | 28,116 | 31,914 |
| | 3 | 0 | 3,284 | 8,908 | 12,736 | 14,634 |
| | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $w$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 1 | 0 | 196,036 | 302,395 | 313,406 | 311,553 |
| | 2 | 0 | 302,395 | 463,166 | 470,492 | 462,971 |
| | 3 | 0 | 313,405 | 470,092 | 469,639 | 458,719 |
| | 4 | 0 | 311,553 | 462,971 | 458,719 | 446,833 |
| Добавочный множитель | $0{,}01412 \frac{qab}{E \cdot \delta}$ | | | | | |

Полученные системы решались на ЭЦВМ (М-20) методом исключения по Гауссу и итерационным методом Зейделя, так как при моделировании реализуется итерационный процесс.

Результаты исследования подтверждают возможность моделировать уравнения пологих оболочек на квазианалоговых математических машинах с использованием перекрещивающихся сеток.

ЛИТЕРАТУРА


1. Власов В. В. Общая теория оболочек. ГИТТЛ. М.—Л., 1949.
2. Степанов А. Е.— В кн.: Математическое моделирование и электрические цепи. Вып. 2. Изд-во АН УССР, 1964.



Доложено на семинаре
3 июня 1966 г.

# О МЕТОДЕ ДЕФОРМАЦИЙ ДЛЯ ИЗГИБАЕМЫХ ПЛАСТИН

А. Е. СТЕПАНОВ, Н. Т. РУБЛЕВСКИЙ, Т. Г. ХАРЧЕНКО

1. Все чаще для решения задач строительной механики и теории упругости стали применять методы математического моделирования. При моделировании изгиба пластин, предварительно применив метод сеток, приходится решать систему линейных алгебраических уравнений, матрица коэффициентов которых, вообще говоря, не всегда является положительно-определенной. Матрица, составленная по методу деформаций, обладает свойством положительной определенности [1]. А так как для устойчивости электрической модели достаточно, чтобы матрица решаемой системы была положительно-определенной, то представляет интерес применение метода деформаций к расчету изгиба пластин.

2. Расчет изгиба изотропных упругих пластин постоянной толщины сводится к решению неоднородного бигармонического уравнения

$$\nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D}, \tag{1}$$

где $w$ — прогиб пластины из плоскости; $p\,(x,\,y)$ — интенсивность распределенной нагрузки; $D = \dfrac{E\,\delta^3}{12\,(1-\mu^2)}$ — цилиндрическая жесткость; $E$ — модуль упругости; $\mu$ — коэффициент Пуассона; $\delta$ — толщина пластины.

Погонные силовые факторы выражаются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} M_x &= -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),\\ M_y &= -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} Q_x &= -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x}\right),\\ Q_y &= -D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right)\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

3. При расчете на изгиб пластин предлагаем следующую схему. Пластину разбиваем на квадратные пластинки, которые назовем элементарными, и потребуем выполнения условий равновесия по серединам сторон, а также принципа взаимности деформаций.

Для вывода уравнений метода деформаций представим каждую элементарную пластинку так, как показано на рис. 1. Поочередно задавая в точках защемления единичные углы поворота $\varphi_a$, $\varphi_b$, $\varphi_c$, $\varphi_d$ и единичные прогибы $w_a$, $w_b$, $w_c$, $w_d$, найдем моменты $M_a(\varphi_a)$, $M_b(\varphi_a)$, $M_c(\varphi_a)$, $M_d(\varphi_a)$, $M_a(\varphi_b)$, $M_b(\varphi_b)$, ..., $M_c(\varphi_d)$, $M_d(\varphi_d)$, $M_a(w_a)$, $M_b(w_a)$, ..., $M_c(w_d)$, $M_d(w_d)$ и перерезывающие силы $Q_a(\varphi_a)$, $Q_b(\varphi_a)$, ..., $Q_c(\varphi_d)$, $Q_d(\varphi_d)$, $Q_a(w_a)$, $Q_b(w_a)$, ..., $Q_c(w_d)$, $Q_d(w_d)$, как функции от углов поворота и прогибов в точках $a$, $в$, $c$, $d$. Также определим $M_a(p)$, $M_b(p)$, $M_c(p)$, $M_d(p)$, $Q_a(p)$, $Q_b(p)$, $Q_c(p)$, $Q_d(p)$ от единичной равномерно распределенной нагрузки $p$.

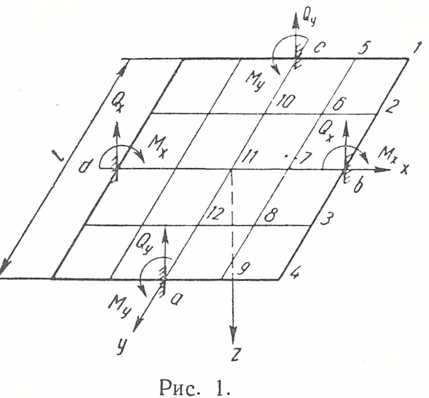


Рис. 1.

Таким образом, получим для точки $a$:

$$M_a = -\frac{D}{h}\{h[M_a(\varphi_a)\bar{\varphi}_a + M_a(\varphi_b)\bar{\varphi}_b + M_a(\varphi_c)\bar{\varphi}_c + M_a(\varphi_d)\bar{\varphi}_d] + M_a(w_a)\bar{w}_a + M_a(w_b)\bar{w}_b + M_a(w_c)\bar{w}_c + M_a(w_d)\bar{w}_d + h^3 M_a(p)\},$$

$$Q_a = -\frac{D}{h^2}\{h[Q_a(\varphi_a)\bar{\varphi}_a + Q_a(\varphi_b)\bar{\varphi}_b + Q_a(\varphi_c)\bar{\varphi}_c + Q_a(\varphi_d)\bar{\varphi}_d] + Q_a(w_a)\bar{w}_a + Q_a(w_b)\bar{w}_b + Q_a(w_c)\bar{w}_c + Q_a(w_d)\bar{w}_d + h^3 Q_a(p)\}, \quad (4)$$

где $M_i(\varphi_j)$, $M_i(w_j)$, $Q_i(\varphi_j)$, $Q_i(w_j)$ — моменты и перерезывающие силы от единичных смещений; $\bar{\varphi}_a$, $\bar{\varphi}_b$, $\bar{\varphi}_c$, $\bar{\varphi}_d$ — действительные углы поворота; $\bar{w}_a$, $\bar{w}_b$, $\bar{w}_c$, $\bar{w}_d$ — действительные прогибы.

Аналогично записываются $M_b$, $Q_b$, $M_c$, $Q_c$, $M_d$, $Q_d$.

4. Для определения коэффициентов в формулах (4) воспользуемся методом конечных разностей. Наносим сетку на элементарную пластинку (рис. 1) с шагом $h = \Delta x = \Delta y = \frac{l}{4}$. В пронумерованных точках найдем прогибы от единичных смещений в местах защемления. По полученным данным находим все интересующие нас $M$ и $Q$. Так как единичное смещение (либо $p = 0$, $\varphi = 1$, $w = 0$ или $p = 0$, $\varphi = 0$, $w = 1$) задается только в одной точке, то решение будет симметрично относительно той оси, на которой лежит эта точка.

Если мы положим $p = 0$, $\varphi = 1$, $w = 0$, то нам достаточно решить систему алгебраических уравнений двенадцатого порядка ($w_1 \div w_{12}$) (рис. 1).

Эту систему составляем, пользуясь бигармоническим оператором:

а) для точек 7, 10, 11, 12 с учетом граничных условий (рис. 2, *а*)

$$20w_0 - 8(w_1 + w_2 + w_3 + w_4) + 2(w_5 + w_6 + w_7 + w_8) + w_9 + \\ + w_{10} + w_{11} + w_{12} = \frac{ph^4}{D};$$

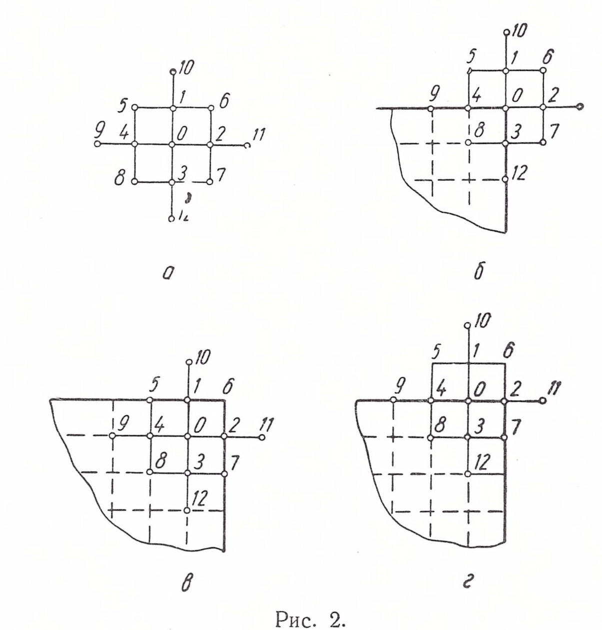



Рис. 2.

б) для угловых точек 1, 4 (рис. 2, *б*)

$$(3 - 2\mu - \mu^2)(w_0 - w_3 - w_4) + (2 - 2\mu) w_8 + \\ + 0{,}5(1 - \mu^2)(w_9 + w_{12}) = \frac{ph^4}{D};$$

в) для внутренних предугловых точек 6, 8 (рис. 2, *в*)

$$18w_0 - (6 - 2\mu)(w_1 + w_2) - 8(w_3 + w_4) + (2 - \mu)(w_5 + w_7) + \\ + 2(1 - \mu) w_6 + 2w_8 + w_9 + w_{12} = \frac{ph^4}{D};$$

г) для предугловых точек 2, 3, 5, 9 (рис. 2, *г*)

$$(15 - 8\mu - 4\mu^2) w_0 - (12 - 4\mu) w_3 + (4 - 2\mu) w_7 + 4w_{12} + 2w_8 - \\ - (6 - 4\mu - 2\mu^2) w_2 - (8 - 2\mu - 2\mu^2) w_a + w_9 = \frac{ph^4}{D}.$$

| $\bar{\varphi}_a$ | $\bar{\varphi}_b$ | $\bar{\varphi}_c$ | $\bar{\varphi}_d$ | $\bar{w}_a$ |
|---|---|---|---|---|
| 1,511000 | —0,185125 | 0,104605 | 0,185125 | —0,747540 |
| —0,185125 | 1,511000 | 0,185125 | 0,104605 | 0,343642 |
| 0,104605 | 0,185125 | 1,511000 | —0,185125 | —0,060256 |
| 0,185125 | 0,104605 | —0,185125 | 1,511000 | —0,343642 |
| —1,242573 | 0,292208 | —0,067530 | —0,292208 | 0,825880 |
| 0,292208 | —1,242573 | —0,292208 | —0,067530 | —0,498278 |
| 0,067530 | 0,292208 | 1,242573 | —0,292208 | 0,170736 |
| 0,292208 | 0,067530 | —0,292208 | 1,242573 | —0,498278 |

Моменты и поперечные силы вычислены по конечно-разностным формулам, приведенным в работе [2], при $\mu = \frac{1}{6}$.

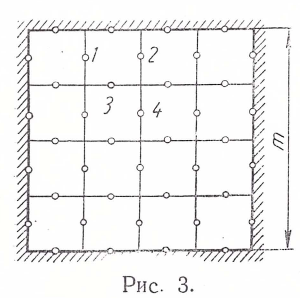


Рис. 3.

Полученные таким образом уравнения метода деформаций даны в таблице.

5. В качестве примера рассмотрим квадратную пластину со стороной $m = 2$, жестко защемленную по краям. Разделим ее на элементарные пластинки (рис. 3) и для точек 1, 2, 3, 4 (с учетом симметрии) запишем по два уравнения равновесия, пользуясь формулами, приведенными в таблице. Первое уравнение равновесия представляет собой сумму моментов в точке сопряжения элементарных пластинок, а второе — сумму перерезывающих сил. В итоге получим систему уравнений с шестью неизвестными $\varphi_1$, $\varphi_2$, $w_1$, $w_2$, $w_3$, $w_4$, решив которую найдем:

$$\varphi_1 = 0{,}000606\ \frac{p}{D}, \quad \varphi_2 = 0{,}001754\ \frac{p}{D},$$

$$w_1 = 0{,}003567\ \frac{p}{D}, \quad w_2 = 0{,}004653\ \frac{p}{D},$$

$$w_3 = 0{,}008698\ \frac{p}{D}, \quad w_4 = 0{,}012184\ \frac{p}{D}.$$

Для сравнения приведем решение той же задачи по конечно-разностному методу при шаге сетки $h = \frac{1}{4}$:

$$w_1 = 0{,}003821\ \frac{p}{D}, \quad w_2 = 0{,}005921\ \frac{p}{D},$$

$$w_3 = 0{,}0129\ \frac{p}{D}, \quad w_4 = 0{,}02053\ \frac{p}{D}.$$

| $\overline{w}_b$ | $\overline{w}_c$ | $\overline{w}_d$ | $p$ | |
|---|---|---|---|---|
| 0,343642 | 0,060256 | 0,343642 | 0,986254 | $M_a$ |
| —0,747540 | 0,343642 | 0,060256 | 0,986254 | $M_b$ |
| —0,343642 | 0,747540 | —0,343642 | —0,986254 | $M_c$ |
| —0,060256 | —0,343642 | 0,747540 | —0,986254 | $M_d$ |
| —0,498278 | 0,170736 | —0,498278 | —2,576542 | $Q_a$ |
| 0,825820 | —0,498278 | 0,170736 | —2,576542 | $Q_b$ |
| —0,498278 | 0,825820 | —0,498278 | —2,576542 | $Q_c$ |
| 0,170736 | —0,497278 | 0,825820 | —2,576542 | $Q_d$ |

Описанный метод может быть использован для расчета изгибаемых пластин с различными граничными условиями на моделирующих математических машинах.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнов А. Ф. Устойчивость и колебание сооружений. М., Трансжелдориздат, 1958.

2. Варвак П. М., Губерман И. О., Мирошниченко М. М., Предтеченский Н. Д. Таблицы для расчета прямоугольных плит. Изд-во АН УССР, К., 1959.

3. Пухов Г. Е., Васильев В. В., Степанов А. Е., Токарева О. Н. Электрическое моделирование задач строительной механики. Изд-во АН УССР, К., 1963.

Доложено на семинаре
3 июня 1966 г.

# К ВОПРОСУ О СХОДИМОСТИ ПРОЦЕССОВ УРАВНОВЕШИВАНИЯ КВАЗИАНАЛОГА УРАВНЕНИЯ ТИПА ФУРЬЕ—КИРХГОФА

Н. В. ДИЛИГЕНСКИЙ

В работе приводятся результаты исследования процесса уравновешивания квазианалога, построенного для решения конечно-разностного уравнения типа Фурье — Кирхгофа, которое может быть записано в виде [1]

$$AX = F, \tag{1}$$

$X$ — вектор неизвестных; $F$ — вектор заданных величин; $A$ — квадратная несимметричная матрица порядка $n$. Модель квазианалога построим так, чтобы она реализовала уравнение

$$(A - D) X = F - D\Phi, \tag{2}$$

где $\Phi$ — вектор уравновешивающих величин; $A - D$ — симметричная матрица.

Процесс уравновешивания квазианалога ведется следующим образом. На вход модели подается вектор уравновешивания $\Phi_0$ и в узлах модели снимается решение $X_0$. Величина $X_0$ направляется в устройство уравновешивания, где из него вырабатывается вектор $\Phi_1$, который вновь подается на вход модели и снимается решение $X_1$. Затем процесс повторяется по описанному циклу. Используя уравнение (2), процесс уравновешивания можно представить так:

$$X_k = B\Phi_k + (A - D)^{-1} F, \tag{3}$$

где $B = -(A - D)^{-1} D$.

Процесс уравновешивания сходится к решению, если при $k \to \infty$ $X_k$ и $\Phi_k$ стремятся к одному и тому же пределу. Этот предел и будет решением системы (1).

Запишем стандартную форму стационарной линейной итерации [2]

$$X_k = HX_{k-1} + V, \tag{4}$$

где $H$ — некоторая матрица; $V$ — вектор-столбец.

Необходимым и достаточным условием сходимости итерационного процесса (5) является выполнение неравенства [2]

$$\bar{\lambda} < 1, \tag{5}$$

где $\bar{\lambda} = \max |\lambda_i|$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ — спектральный радиус $H$; $\lambda_i$ — собственные значения $H$, т. е. корни уравнения

$$\det (H - \lambda E) = 0;$$

$E$ — единичная матрица.

Средняя скорость сходимости $r$ итерационного процесса (5) определяется по Янгу [3]

$$r = -\ln \bar{\lambda}. \tag{6}$$

Сведем нашу задачу об исследовании уравновешивания квазианалога к отысканию матрицы перехода $H$ и нахождению ее спектрального радиуса. Матрица $H$ определяется видом матрицы $B$ и принятым методом уравновешивания. Найдем $H$ для некоторых канонических матриц $B$ и для наиболее распространенных методов уравновешивания модели.

Предварительно заметим, что иногда мы будем вместо представления (4) использовать следующее уравнение:

$$\Phi_k = H_1 \Phi_{k-1} + V_1, \tag{7}$$

где $H_1$ — некоторая матрица; $V_1$ — вектор-столбец.

Сравнивая соотношения (3), (4) и (7), получим

$$H_1 = B^{-1} H B, \tag{8}$$

т. е. матрицы $H$ и $H_1$ подобны и, следовательно, их спектральные радиусы равны.

Рассмотрим задачу о движении теплоисточника по стержню бесконечной длины. Шаг сетки $h$ примем постоянным $h = \frac{1}{n+1}$. Электрическая схема модели представлена на рис. 1, *а*. Матрица $A$ запишется в виде

$$A = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & & & 0 \\ \beta + \delta & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \beta \\ 0 & & & \beta + \delta & \alpha \end{vmatrix}, \tag{9}$$

где $\beta = \frac{1}{R_1} = h$; $\delta = \frac{1}{R_2} = \mathrm{Pe}$; $\gamma = \frac{1}{R_3} = h \left(\mathrm{Bi} + \frac{1}{P}\right)$, (10)

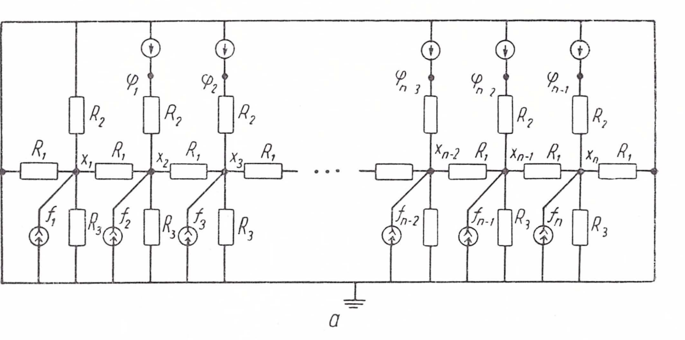
$$\alpha = -(2\beta + \delta + \gamma). \tag{11}$$

Обозначения приняты такие же, как в работе [1]:

$\mathrm{Bi} = \frac{2\bar{\alpha}R}{\lambda}$ — число Био; $\bar{\alpha}$ — коэффициент теплоотдачи; $R_1$; $R_2$; $R_3$ — сопротивления схемы рис. 1, *а*.

В качестве $D$ возьмем матрицу с элементами $d_{ij}$:

$$d_{ij} = \begin{cases} \delta \text{ при } j - i = 1, \\ 0 \text{ при } j - i \neq 1. \end{cases} \tag{12}$$





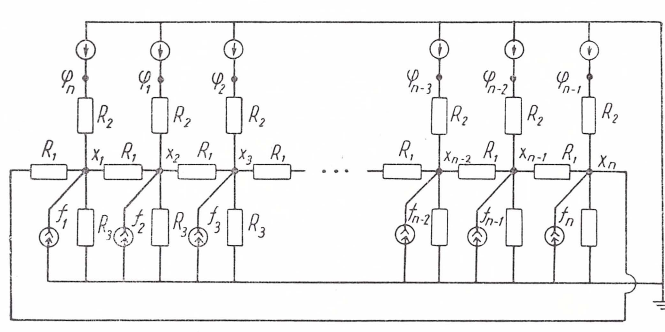




Рис. 1. Схема модели квазианалога для моделирования движения теплоисточника:

*а* — по бесконечному стержню; *б* — по кольцу.

Изучим влияние элементов матрицы $A$ и работы устройства уравновешивания квазианалога на сходимость процесса уравновешивания данной задачи.

Если устройство уравновешивания работает так, что реализует одновременную передачу всех компонент $X_{k-1}$ в вектор уравновешивания $\Phi_k$, т. е.

$$\Phi_k = X_{k-1}, \tag{13}$$

то из формулы (3) имеем

$$H = B. \tag{14}$$

Используя аппарат матричного исчисления [4, 5] для спектрального радиуса матрицы $B$, получим

$$\bar{\lambda} = \frac{\beta\delta}{\dfrac{\alpha^2}{4\cos^2 \dfrac{\pi}{n+1}} - \beta^2}, \tag{15}$$

где $\alpha$, $\beta$, $\delta$ — определяются соотношениями (10) и (11). При выполнении условия (11) $\bar{\lambda}$ всегда меньше 1, т. е. процесс уравновешивания при принятом способе реализации всегда сходится.

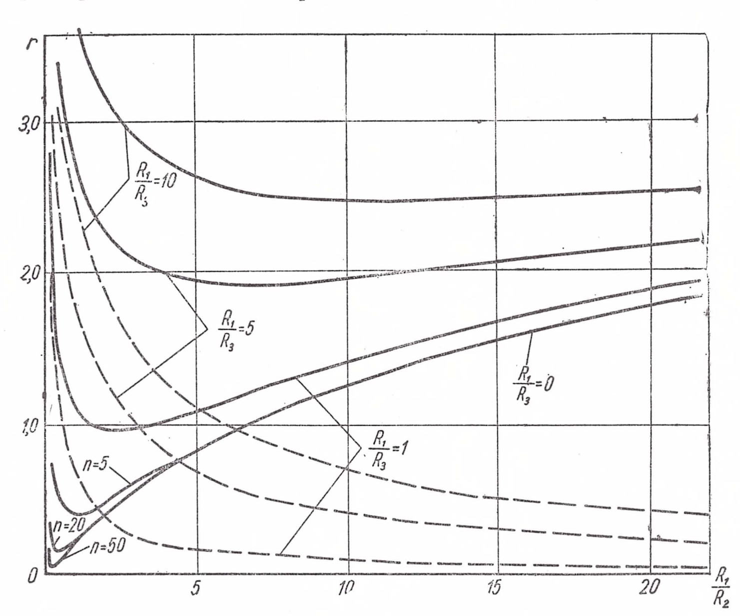



Рис. 2. График зависимости скорости сходимости процесса уравновешивания модели от параметров модели:
——— — задача для бесконечного стержня; — — — — задача для кольца.

Скорость сходимости процесса уравновешивания определится следующим выражением:

$$r = \ln \frac{\dfrac{\alpha^2}{4\cos^2 \dfrac{\pi}{n+1}} - \beta^2}{\beta\delta}. \tag{16}$$

Кривые скоростей сходимости изображены на рис. 2.

Проанализируем зависимость $r$ от следующих параметров уравнения:

$\frac{\delta}{\beta} = \frac{R_1}{R_2} = \mathrm{Pe}\, h$ — величина, пропорциональная скорости дви

жения теплоисточника; $\frac{\gamma}{\beta} = \frac{R_1}{R_3} = \mathrm{Bi}\, h^2 + \frac{h^2}{P}$ — величина прямо пропорциональная теплоотдаче и обратно пропорциональная шагу по времени.

Скорость сходимости прямо зависит от $\frac{\alpha}{\beta}$, т. е. наличие стока на землю положительно влияет на сходимость процесса уравновешивания модели.

Существенное влияние на скорость сходимости оказывает величина, характеризующая степень асимметрии матрицы — $\frac{\delta}{\beta}$. Для симметричной матрицы $\left(\frac{\delta}{\beta} = 0\right)$ $r = \infty$, т. е. решение получается непосредственно на сетке без уравновешивания. При возрастании $\frac{\delta}{\beta}$ скорость сходимости падает, достигает минимума в некоторой точке и затем возрастает при увеличении $\frac{\delta}{\beta}$. При большой степени асимметрии скорость сходимости имеет вид

$$r \approx \ln \frac{\delta}{4\beta}. \tag{17}$$

В пределе при $\frac{\delta}{\beta} \to \infty$ $r \to \infty$. Это происходит, когда матрица $A$ вырождается в двухдиагональную и решение тогда можно получить без итераций, последовательно вычисляя компоненты $X$.

Зависимость скорости сходимости от числа узлов ярко проявляется при $|\alpha| \simeq 2\beta$, т. е. с учетом соотношения (11) при малых значениях $\frac{\delta}{\beta}$ и $\frac{\gamma}{\beta}$. В этой области $r$ обратно зависит от $n$. В остальной области значений $\frac{\delta}{\beta}$ и $\frac{\gamma}{\beta}$ зависимостью скорости сходимости $r$ от числа узлов $n$ можно пренебречь.

Рассмотрим теперь процесс уравновешивания, при котором уравновешивание потенциалов производится сначала в $i$-ой точке и затем последовательно во всех остальных точках модели.

Найдем для этого случая матрицу перехода $H_1$.

В тот момент, когда уравновешивание происходит в $i$-ой точке, потенциал в ней можно определить следующим образом:

$$\varphi_{ik} = b_{i1}\varphi_{1k} + b_{i2}\varphi_{2k} + \ldots + b_{ii}\varphi_{ik} + $$
$$+ b_{i,i+1}\varphi_{i+1,\,k-1} + \ldots + b_{in}\varphi_{n,k-1}, \tag{18}$$

где $b_{ij}$ — элементы матрицы $B$; $\varphi_{ik}$ — компоненты вектора уравновешивания $\Phi_k$. Если уравнение (18) записать для каждой из $n$ точек модели, то в матричной символике имеем

$$\Phi_k = T\Phi_{k-1} + S\Phi_{k-1}, \tag{19}$$

где $T$ и $S$ — матрицы с элементами

$$t_{ij} = \begin{cases} b_{ij} & \text{при } i \geqslant j, \\ 0 & j > i, \end{cases} \tag{20}$$

$$s_{ij} = \begin{cases} b_{ij} & j > i, \\ 0 & i \geqslant j. \end{cases} \tag{21}$$

Если теперь матричное уравнение (19) представить в стандартной форме (7), то имеем

$$H_1 = (E - T)^{-1} S. \tag{22}$$

При большей несимметричности $H_1$ ее спектральный радиус получается равным

$$\bar{\lambda} = \frac{4\beta^2}{\delta^2} \tag{23}$$

и скорость сходимости

$$r = 2 \ln \frac{\delta}{2\beta}. \tag{24}$$

Сравнивая равенство (24) с выражением (17), видим, что при большой степени асимметрии матрицы $\left(\frac{\delta}{\beta}\right)$ скорость сходимости второго из разобранных методов приблизительно в 2 раза выше предыдущего, т. е. применение последовательного уравновешивания точек дает сокращения числа итераций, а следовательно, и времени решения, грубо говоря, в 2 раза. Это имеет особенно большое значение при ручном уравновешивании квазианалога. Заметим, что изученные выше методы уравновешивания квазианалога можно рассматривать как неявные матрицы соответственно одновременного и последовательного смещения для системы (1).

Скорость сходимости их превышает не менее чем в 2 раза скорости соответствующих явных методов одновременного и последовательного смещения.

Так скорость сходимости явного метода одновременных смещений имеет вид

$$r = \frac{1}{2} \ln \frac{\alpha^2}{4\beta\gamma \cos^2 \frac{\pi}{n+1}} \tag{25}$$

и при больших $\frac{\delta}{\beta}$

$$r = \frac{1}{2} \ln \frac{\delta}{4\beta}. \tag{26}$$

Скорость сходимости явного метода последовательных смещений — метода Зейделя — запишется так:

$$r = \ln \frac{\alpha^2}{4\beta\gamma \cos^2 \frac{\pi}{n+1}} \tag{27}$$

и для больших $\frac{\delta}{\beta}$

$$r = \ln \frac{\delta}{4\beta}. \tag{28}$$

Сказанное иллюстрируется графиками на рис. 3, где представлены скорости сходимостей четырех итеративных процессов.

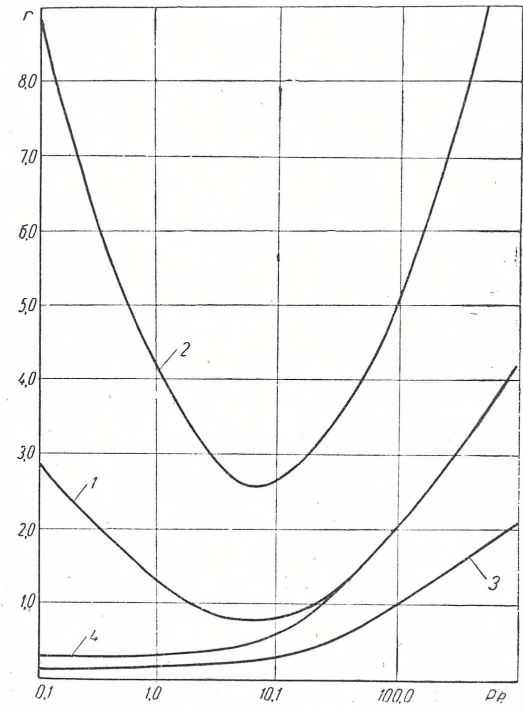



Рис. 3. Сравнение скоростей сходимостей итераций для модели рис. 1, *а* ($P = \infty$, $n = 5$):

*1* — уравновешивание модели при одновременной передаче потенциалов; *2* — при поочередном уравновешивании точек модели; *3* — численный метод одновременных смещений; *4* — численный метод последовательных смещений — метод Зейделя.

Рассмотрим влияние качества работы устройства уравновешивания на точность решения задачи. Устройство уравновешивания должно обращать в нулевой вектор невязок уравновешивания

$$\varepsilon_k = X_k - \Phi_k. \tag{29}$$

Если бы вектор $\varepsilon_k$ равнялся нулю, то и $X_k$ и $\Phi_k$ являлись бы точным решением (1). На самом деле, после того, как процесс уравновешивания модели будет завершен на некоторой $k$-ой итерации, вектор $\varepsilon_k$ будет отличен от нуля ($\| \varepsilon_k \| \neq 0$), и мы получим приближенное решение $X_k$ вместо точного $A^{-1} F$.

Обозначим невязки решения через $R_k$:

$$R_k = A^{-1} F - X_k. \tag{30}$$

Тогда отклонением вектора $\Phi_k$ от решения $A^{-1} F$ будет вектор $Q_k$:

$$Q_k = A^{-1} F - \Phi_k = R_k + \varepsilon_k. \tag{31}$$

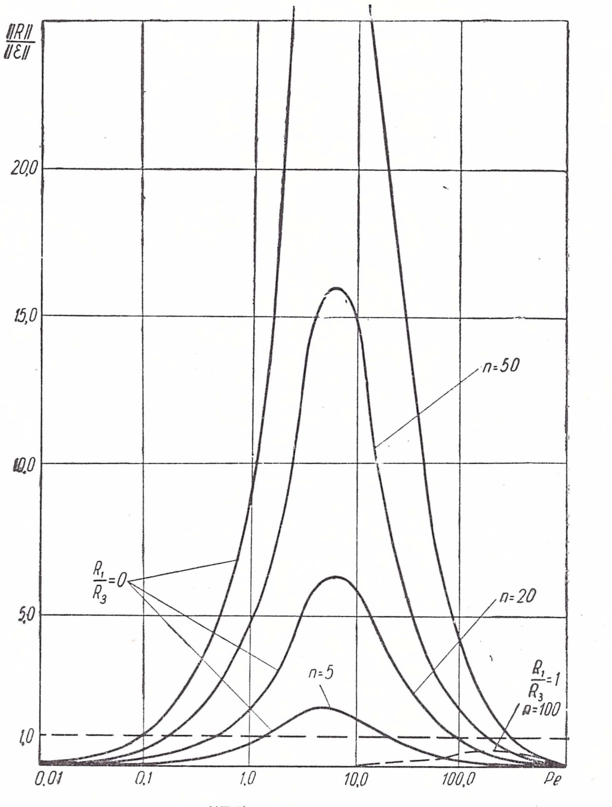



Рис. 4. Зависимость $\frac{\|R\|}{\|\varepsilon\|}$ от параметров модели рис. 1, *а*.

Важным свойством линейного итерационного процесса является то, что для любой нормы ошибки, при достаточно большом числе итераций $k$, ошибка $R_k$ убывает в среднем в $\bar{\lambda}$ раз за каждую итерацию [2], т. е.

$$\frac{\|R_k\|}{\|R_{k-1}\|} = \bar{\lambda}, \tag{32}$$

где $\bar{\lambda}$ — спектральный радиус матрицы перехода $H$.

Если рассматривать уравновешивание с одновременной передачей потенциалов, $\Phi_k = X_{k-1}$, то из равенства (31)

$$R_{k-1} = Q_k = R_k + \varepsilon_k, \tag{33}$$

следовательно,

$$\frac{\|R_k\|}{\|R_k + \varepsilon_k\|} = \bar{\lambda}, \tag{34}$$

где $\bar{\lambda}$ — определяется выражением (15).

Воспользовавшись неравенством треугольника для нормы, из равенства (34) получим

$$\|R_k\| \leqslant \frac{\bar{\lambda}}{1-\bar{\lambda}} \|\varepsilon_k\|. \tag{35}$$

Значение $\mu = \dfrac{\bar{\lambda}}{1-\bar{\lambda}}$ можно интерпретировать как верхнюю грань отношений невязок решения $\| R \|$ к невязкам уравновешивания $\| \varepsilon \|$. Учитывая соотношение (15), имеем

$$\frac{\|R\|}{\|\varepsilon\|} \leqslant \mu \equiv \frac{\beta\delta}{\dfrac{\alpha^2}{4\cos^2 \dfrac{\pi}{n+1}} - \beta^2 - \beta\delta}. \tag{36}$$

Почти во всей области значений $\dfrac{\delta}{\beta}$ и $\dfrac{\gamma}{\beta}$ величина $\mu$ мала и достигает существенной величины лишь при большом числе узлов и при малых $\dfrac{\gamma}{\beta}$ и $\dfrac{\delta}{\beta}$. На рис. 4 изображен график значений $\mu$ в зависимости от параметров уравнения.

Проделанный выше анализ относился к решению задачи о движении теплоисточника по бесконечно длинному стержню. Рассмотрим поведение итерационного процесса уравновешивания квазианалога при решении задачи о движении теплоисточника по кольцу. Схема модели изображена на рис. 1, *б*.

Матрица $A$ в этом случае имеет вид

$$A = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \beta+\delta \\ \beta+\delta; & \alpha & \cdot & & & & \cdot & 0 \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ 0 & & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \vdots & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \vdots & & & & & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & & & & & \cdot & \cdot & \beta \\ \beta & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & 0\ \beta+\delta; & \alpha \end{vmatrix}. \tag{37}$$

В качестве $D$ примем матрицу

$$D = \begin{vmatrix} 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \delta \\ \delta & \cdot & & & & & & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & & 0 & \delta & 0 \end{vmatrix}. \tag{38}$$

Если процесс уравновешивания модели вести по одному из рассмотренных способов, то

$$\bar{\lambda} = \frac{\delta}{\delta + \gamma} . \tag{39}$$

Из равенства (39) видно, что при $\gamma = 0$ $\bar{\lambda} = 1$, т. е. процесс итераций расходится. При $\gamma > 0$ и любых $\delta \geqslant 0$ процесс сходится. Скорость сходимости определяется формулой

$$r = \ln\left(1 + \frac{\gamma}{\delta}\right) . \tag{40}$$

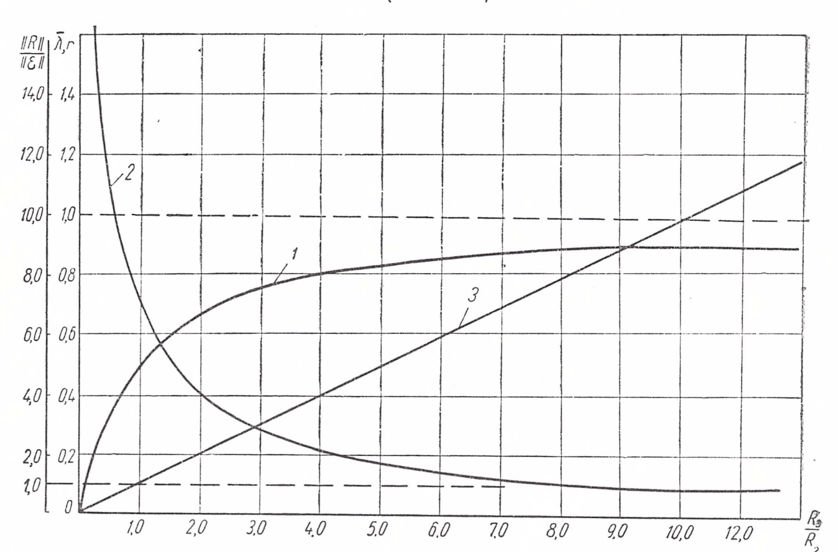



Рис. 5. Зависимость характеристик процесса уравновешивания для модели рис. 1, *б*:

*1* — спектральный радиус — $\bar{\lambda}$; *2* — скорость сходимости *r*; *3* — $\frac{\|R\|}{\|\varepsilon\|}$.

Из выражения (40) видно, что наличие стока на землю улучшает сходимость, с увеличением же асимметрии матрицы скорость сходимости падает, асимптотически стремясь к нулю. Результаты (39) и (40) приведены на рис. 5. Найдем $\mu$, подставляя значение $\lambda$ (39) в формулу (35)

$$\mu = \frac{\delta}{\gamma} . \tag{41}$$

Сравнивая равенства (40) и (16), заметим, что сходимость процесса уравновешивания для задачи о движении теплоисточника по бесконечному стержню выше, чем при движении по кольцу. Особенно целесообразно модель рис. 1, *а* применять при больших скоростях движения — Pe, переходя, в предельном случае, к получению решения сразу, без итераций. Анализируя соотношения (41) и (36),

можно отметить, что в модели рис. 1, *а* происходит как бы демпфирование невязок уравновешивания граничными условиями первого рода — потенциалами. В модели рис. 1, *б* происходит накопление ошибок уравновешивания с ростом числа итераций и они растут линейно при увеличении Ре.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Резников А. Н., Темников А. В., Дилигенский Н. В., Гаврилов Б. М.— Настоящий сборник, 263.
2. Вазов В., Форсайт Л. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. ИЛ, М., 1963.
3. Joung D. M. Iterative methods for solving partial difference equations of elliptic type. Trans. Amer. Math. Soc. 76, 92—111.
4. Фадеев Д. К., Фадеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. Физматгиз, М., 1960.
5. Пароди М. Локализация характеристических чисел матриц и ее применения. ИЛ, М., 1960.



Доложено на семинаре
10 декабря 1965 г.

# ПРИМЕНЕНИЕ КВАЗИАНАЛОГОВОГО ЭЛЕКТРОМОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ РЕЗАНИЯ И ИЗНОСА

А. Н. РЕЗНИКОВ, А. В. ТЕМНИКОВ,
Н. В. ДИЛИГЕНСКИЙ, Б. М. ГАВРИЛОВ

При решении задач теплофизики процессов резания и трения в последнее время наряду с аналитическими методами начали получать применение методы электрического моделирования, имеющие ряд преимуществ перед первыми, особенно при исследовании температур в телах сложной конфигурации и при сложных условиях теплообмена [1—3].

Как в задачах исследования температурных полей при резании, так и в тепловых задачах теории трения и износа необходимо моделировать краевые задачи теплообмена при относительном перемещении тел, находящихся в тепловом контакте. При этом моделирование для одного из двух контактирующих тел удобно производить в подвижной системе координат.

В конечном итоге задача сводится к моделированию дифференциального уравнения типа Фурье — Кирхгофа, которое в криволинейной ортогональной системе координат в безразмерной форме может быть записано в виде

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial F_0} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\mathrm{Pe}^i}{\nu_i} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial \psi_i} = \nu^2\vartheta + P_0, \qquad (1)$$

где $\vartheta = \frac{t - t_0}{t_м - t_0}$ — безразмерная температура; $t_м - t_0$ — масштабная разность температур; $F_0 = \frac{a\tau}{R^2}$ — число Фурье; $R$ — характерный размер; если $q_i$ — криволинейная ортогональная координата имеет размерность длины, то $\psi_i = \frac{q_i}{R}$; $\mathrm{Pe}^i = \frac{v_i R}{a}$ — число Пекле, $v_i = H_i \frac{dq}{d\tau}$; $\nu_i = H_i$, где $H_i$ — коэффициент Ламе; если $q_i$ без-

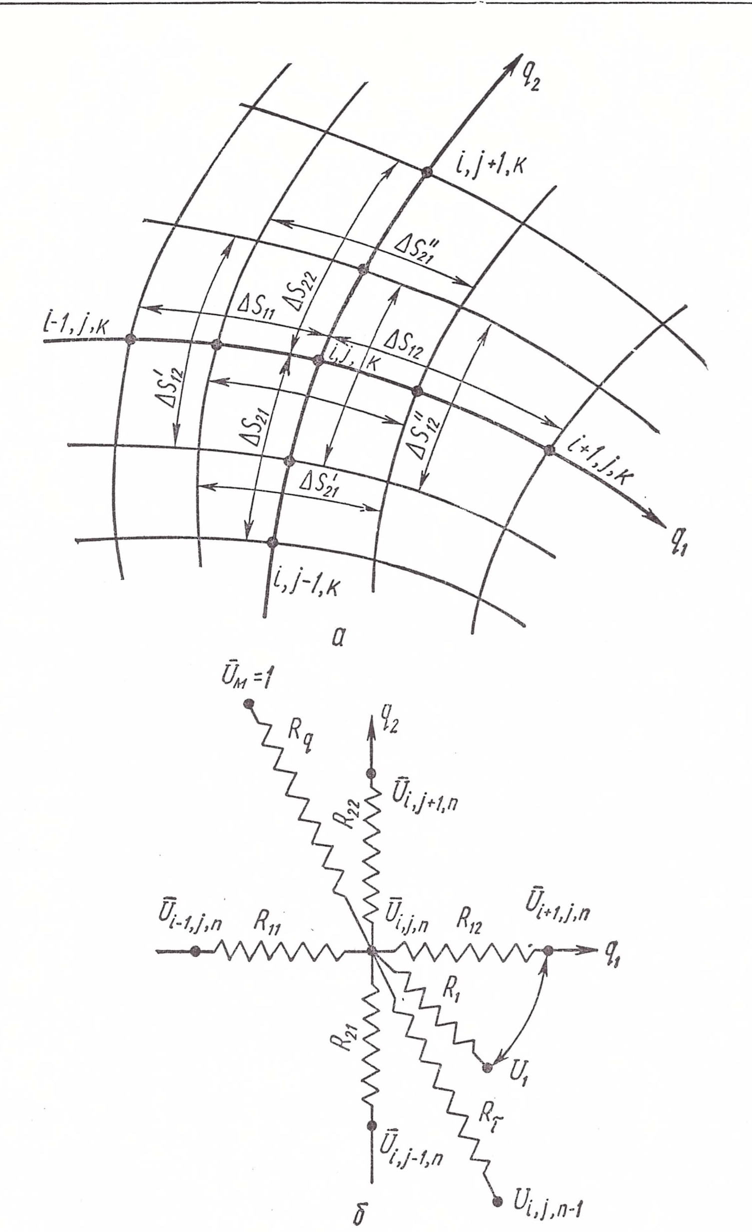



Рис. 1. Схемы: *а* — узла сетки; *б* — элемента электрической сетки для узла *i*, *j*, *k*.

размерно, то $\psi_i = q_i$, $v_i = \frac{H_i}{R}$

$$\nabla^2\vartheta = \frac{1}{v_1 v_2 v_3}\left[\frac{\partial}{\partial\psi_1}\left(\frac{v_2 v_3}{v_1}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial\psi_1}\right) + \frac{\partial}{\partial\psi_2}\left(\frac{v_3 v_1}{v_2}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial\psi_2}\right) + \frac{\partial}{\partial\psi_3}\left(\frac{v_1 v_2}{v_3}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial\psi_3}\right)\right].$$

Предложенные аналоговые методы электрического моделирования уравнения (1) [4—6] оказываются практически неприменимыми при больших скоростях относительного движения контактирующих тел (большие числа Pe), при зависимости вектора скорости от координат и времени, а также при зависимости теплопроводности от температуры. Поэтому применение аналоговых методов оказывается в значительной степени ограниченным.

Для моделирования уравнения (1) авторами предложены и внедрены в расчетную практику квазианалоговые методы, общая теория которых разработана Г. Е. Пуховым [7].

Применение квазианалоговых методов позволило рассчитывать температуры в телах при значительных скоростях движения теплоисточников, что имеет место при точении; позволило рассчитывать температуры в зоне резания с учетом картины течения металла и при вращении теплоисточника относительно тела, а также получать температурные поля в телах при переменной теплопроводности.

Изложению результатов исследований, проведенных в этом направлении в научно-производственной инструментальной лаборатории Куйбышевского политехнического института, и посвящена настоящая работа.

Обоснование квазианалоговых методов рассмотрим на примере решения двухмерного уравнения типа (1) и для того случая, когда перемещение теплоисточника совершается лишь вдоль одной из координатных осей.

В этом случае уравнение (1) запишется в виде

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial F_0} + \frac{\mathrm{Pe}^1}{v_1}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial\psi_1} = \frac{1}{v_1 v_2}\left[\frac{\partial}{\partial\psi_1}\left(\frac{v_2}{v_1}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial\psi_1}\right) + \frac{\partial}{\partial\psi_2}\left(\frac{v_1}{v_2}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial\psi_2}\right)\right] + P_0. \quad (2)$$

Представим уравнение (2) в дискретной форме для узла сетки $(i, j, n)$, изображенного на рис. 1, $a$:

$$v_1(i, j)\, v_2(i, j)\,(\Delta\psi_{11} + \Delta\psi_{12})(\Delta\psi_{21} + \Delta\psi_{22})\left(\frac{\vartheta_{i, j, n} - \vartheta_{i, j, n-1}}{2P} + \frac{\dfrac{\vartheta_{i+1, j, n} - \vartheta_{i, j, n}}{2v_1\left(i + \frac{1}{2}, j\right)\Delta\psi_{12}}}{\mathrm{Pe}^1\left(i + \frac{1}{2}, j\right)}\right) = \frac{\vartheta_{i+1, j, n} - \vartheta_{i, j, n}}{\dfrac{v_1\left(i + \frac{1}{2}, j\right)}{v_2\left(i + \frac{1}{2}, j\right)}\cdot\dfrac{\Delta\psi_{12}}{\Delta\psi_{21} + \Delta\psi_{22}}} +$$

$$+\frac{\vartheta_{i-1,j,n}-\vartheta_{i,j,n}}{\dfrac{\nu_1\left(i-\frac{1}{2},j\right)}{\nu_2\left(i-\frac{1}{2},j\right)}\cdot\dfrac{\Delta\psi_{11}}{\Delta\psi_{21}+\Delta\psi_{22}}}+\frac{\vartheta_{i,j+1,n}-\vartheta_{i,j,n}}{\dfrac{\nu_2\left(i,j+\frac{1}{2}\right)}{\nu_1\left(i,j+\frac{1}{2}\right)}\cdot\dfrac{\Delta\psi_{22}}{\Delta\psi_{11}+\Delta\psi_{12}}}+$$

$$+\frac{\vartheta_{i,j-1,n}-\vartheta_{i,j,n}}{\dfrac{\nu_2\left(i,j-\frac{1}{2}\right)}{\nu_1\left(i,j-\frac{1}{2}\right)}\cdot\dfrac{\Delta\psi_{21}}{\Delta\psi_{11}+\Delta\psi_{12}}}+$$

$$+\frac{\nu_1(i,j)\,\nu_2(i,j)\,(\Delta\psi_{11}+\Delta\psi_{12})\,(\Delta\psi_{21}+\Delta\psi_{22})\,P_0^{(i,j,n)}}{2}, \quad (3)$$

где $P=\Delta F_0$ — шаг безразмерного времени.

Выражение первого закона Кирхгофа в безразмерной форме для узла $(i, j, n)$ дифференциального элемента электрической сетки, изображенного на рис. 1, *б* при условии

$$\overline{U}_1=\overline{U}_{i+1,j,n}, \quad (4)$$

имеет вид

$$\frac{\overline{U}_{i,j,n}-\overline{U}_{i,j,n-1}}{\dfrac{R_\tau}{R_м}}-\frac{\overline{U}_{i+1,j,n}-\overline{U}_{i,j,n}}{\dfrac{R_1}{R_м}}=\frac{\overline{U}_{i+1,j,n}-\overline{U}_{i,j,n}}{\dfrac{R_{12}}{R_м}}+$$

$$+\frac{\overline{U}_{i-1,j,n}-\overline{U}_{i,j,n}}{\dfrac{R_{11}}{R_м}}+\frac{\overline{U}_{i,j+1,n}-\overline{U}_{i,j,n}}{\dfrac{R_{22}}{R_м}}+\frac{\overline{U}_{i,j-1,n}-\overline{U}_{i,j,n}}{\dfrac{R_{21}}{R_м}}+$$

$$+\frac{\overline{U}_м-\overline{U}_{i,j,n}}{R_q}, \quad (5)$$

где $\overline{U}=\dfrac{U-U_0}{U_м-U_0}$ — безразмерный электрический потенциал; $U_м - U_0$ — масштабная разность потенциалов.

Выбирая $\overline{U}_м \gg \overline{U}_{i,j,n}$ и сопоставляя уравнения (3) и (5), получим следующие формулы для расчета сопротивления квазианалога:

$$R_\tau=\frac{2P}{\nu_1(i,j)\,\nu_2(i,j)\,(\Delta\psi_{11}+\Delta\psi_{12})\,(\Delta\psi_{21}+\Delta\psi_{22})}\,R_м=\frac{P}{2\Delta\sigma_1\Delta\sigma_2}\,R_м, \quad (6)$$

$$R_1=\frac{2\nu_1\left(i+\frac{1}{2},j\right)\Delta\psi_{12}}{\nu_1(i,j)\,\nu_2(i,j)\,(\Delta\psi_{11}+\Delta\psi_{12})\,(\Delta\psi_{21}+\Delta\psi_{22})\,\mathrm{Pe}^1\left(i+\frac{1}{2},j\right)}\,R_м=$$

$$=\frac{\Delta\sigma_{12}}{2\Delta\delta_1\Delta\sigma_2\,\mathrm{Pe}^1}\,R_м, \quad (7)$$

$$R_{12} = \frac{\nu_1\left(i + \frac{1}{2}, j\right)}{\nu_2\left(i + \frac{1}{2}, j\right)} \cdot \frac{\Delta\psi_{12}}{\Delta\psi_{21} + \Delta\psi_{22}} R_{\text{м}} = \frac{\Delta\sigma_{12}}{2\Delta\sigma_{12}''} R_{\text{м}}, \tag{8}$$

$$R_{11} = \frac{\nu_1\left(i - \frac{1}{2}, j\right)}{\nu_2\left(i - \frac{1}{2}, j\right)} \cdot \frac{\Delta\psi_{11}}{\Delta\psi_{21} + \Delta\psi_{22}} R_{\text{м}} = \frac{\Delta\sigma_{11}}{2\Delta\sigma_{12}'} R_{\text{м}}, \tag{9}$$

$$R_{22} = \frac{\nu_2\left(i, j + \frac{1}{2}\right)}{\nu_1\left(i, j + \frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{\Delta\psi_{22}}{\Delta\psi_{11} + \Delta\psi_{12}} R_{\text{м}} = \frac{\Delta\sigma_{22}}{2\Delta\sigma_{21}''} R_{\text{м}}, \tag{10}$$

$$R_{21} = \frac{\nu_2\left(i, j - \frac{1}{2}\right)}{\nu_1\left(i, j - \frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{\Delta\psi_{21}}{\Delta\;{}_{11} + \Delta\psi_{12}} R_{\text{м}} = \frac{\Delta\sigma_{21}}{2\Delta\sigma_{21}'} R_{\text{м}}, \tag{11}$$

$$R_q = \frac{2}{\nu_1(i, j)\,\nu_2(i, j)\,(\Delta\psi_{11} + \Delta\psi_{12})\,(\Delta\psi_{21} + \Delta\psi_{22})\,P_0(i, j, n)} R_{\text{м}} =$$

$$= \frac{1}{2\Delta\sigma_1\Delta\sigma_2 P_0} R_{\text{м}}, \tag{12}$$

где $\sigma = \frac{S}{R}$.

Формулами (6)—(12) удобно пользоваться также и в том случае, когда коэффициенты Ламе неизвестны.

В частном случае декартовой системы координат $(x, y, z)$, полагая $\nu_1 = \nu_2 = 1$, $\psi_1 = \frac{x}{R} = \xi$, $\psi_2 = \frac{y}{2} = \eta$, $\Delta\psi_1 = h_\xi$, $\Delta\psi_2 = h_\eta$, получим

$$R_\tau = \frac{2P}{(h_{1\xi} + h_{2\xi})(h_{1\eta} + h_{2\eta})} R_{\text{м}}, \quad R_1 = \frac{-2h_{2\xi}}{(h_{1\xi} + h_{2\xi})(h_{1\eta} + h_{2\eta})\,\mathrm{Pe}} R_{\text{м}},$$

$$R_{12} = \frac{h_{2\xi}}{h_{1\eta} + h_{2\eta}} R_{\text{м}}, \quad R_{11} = \frac{h_{1\xi}}{h_{1\eta} + h_{2\eta}} R_{\text{м}},$$

$$R_{22} = \frac{h_{2\eta}}{h_{1\xi} + h_{2\xi}} R_{\text{м}}, \quad R_{21} = \frac{h_{1\eta}}{h_{1\xi} + h_{2\xi}} R_{\text{м}}, \tag{13}$$

$$R_q = \frac{2}{(h_{1\xi} + h_{2\xi})(h_{1\eta} + h_{2\eta})\,P_0} R_{\text{м}}.$$

Для цилиндрической системы координат $(r, \varphi)$, полагая $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = \frac{r}{R} = \rho$, $\psi_1 = \rho$, $\psi_2 = \varphi$, $\Delta\psi_1 = h_\rho$, $\Delta\psi_2 = h_\varphi$ и учитывая, что

$$\nu_2(i,\ j) = \nu_2\left(i,\ j+\frac{1}{2}\right) = \nu_2\left(i,\ j-\frac{1}{2}\right) = \rho_i,$$

$$\nu_2\left(i+\frac{1}{2},\ j\right) = \rho_i + \frac{h_{2\rho}}{2},\ \nu_2\left(i-\frac{1}{2},\ j\right) = \rho_i - \frac{h_{1\rho}}{2},$$

получим

$$R_\tau = \frac{2P}{\rho_i\,(h_{1\rho}+h_{2\rho})\,h_{1\varphi}+h_{2\varphi})}\ R_{\text{м}},\ R_1 = \frac{-2h_{2\rho}}{\rho_i\,(h_{1\rho}+h_{2\rho})\,(h_{1\varphi}+h_{2\varphi})\,\mathrm{Pe}}\ R_{\text{м}},$$

$$R_{12} = \frac{h_{2\rho}}{\left(\rho_1+\frac{h_{2\rho}}{2}\right)(h_{1\varphi}+h_{2\varphi})}\ R_{\text{м}},\ R_{11} =$$

$$= \frac{h_{1\rho}}{\left(\rho_i-\frac{h_{1\rho}}{2}\right)(h_{1\varphi}+h_{2\varphi})}\ R_{\text{м}}, \qquad (14)$$

$$R_{22} = \frac{\rho_i\,h_{2\varphi}}{h_{1\rho}+h_{2\rho}}\ R_{\text{м}},\ R_{21} = \frac{\rho_i\,h_{1\varphi}}{h_{1\rho}+h_{2\rho}}\ R_{\text{м}},$$

$$R_q = \frac{2}{\rho_i\,(h_{1\rho}+h_{2\rho})\,(h_{1\varphi}+h_{2\varphi})\,P_0}\ R_{\text{м}}.$$

Аналогичные формулы легко получить также для общего случая трехмерной задачи и при перемещении теплоисточника вдоль всех трех координатных осей.

Формулы для трехмерной задачи можно записать, если в соотношениях (13) и (14) заменить $R_{\text{м}}$ на

$$R_{\text{м}} = \frac{1}{h_{1\zeta}+h_{2\zeta}}\ R'_{\text{м}}, \qquad (15)$$

где

$$h_\zeta = \Delta\zeta = \Delta\left(\frac{z}{R}\right).$$

В формулах (13) и (14) сопротивления $R_1$ — положительны, так как числа Pe отрицательны.

Условия (4), при которых обеспечивается эквивалентность уравнений для объектов и для модели, являются условиями уравновешивания квазианалога. Для того чтобы выполнить эти условия, необходимо проводить процесс уравновешивания методом итераций.

В матричной форме уравнение (3) имеет вид

$$AX = F, \qquad (16)$$

где $X$ — вектор неизвестных, определенный в узловых точках; $F$ — вектор заданных величин (начальные и граничные условия); $A$ — несимметрическая матрица, которую вследствие ее асимметрии нельзя моделировать обычными аналоговыми методами.

В предлагаемом методе система (16) представляется в следующей эквивалентной форме:

$$(A - D)\,X = F - D\Phi, \qquad (17)$$

здесь $\Phi$ — вектор уравновешивающих величин; $D$ — матрица, которая выбирается так, чтобы матрица $A-D$ оказалась симметрической, моделируемой обычными аналоговыми методами.

Структурная схема математической модели, реализующей предлагаемый метод, показана на рис. 2. Соответствующее ей матричное уравнение имеет вид

$$\left\| \begin{array}{c|c} A-D & D \\ \hline D^* & K \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} X \\ \hline \Phi \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} F \\ \hline Z \end{array} \right\|, \tag{18}$$

где $D^*$ — транспонированная матрица $D$; $K$ — диагональная матрица; $X$ — вектор напряжений в узлах модели; $\Phi$ — вектор напряжений источников уравновешивания; $F$ — вектор токов граничных условий; $Z$ — вспомогательный вектор токов источников уравновешивания.

Рис. 2. Структурная схема квазианалога.

Блочная симметричная матрица выражения (18) моделируется обычными аналоговыми методами. Эквивалентное уравнение (17) получается из уравнения (18). Условием эквивалентности соотношений (17) и (16) является

$$\Phi = X. \tag{19}$$

Следовательно, уравновешивание заключается в регулировании величины $\Phi$ до обращения в нуль вектора невязок

$$\mathrm{E} = \Phi - X. \tag{20}$$

Если разрешить систему (17) и (20) относительно $\mathrm{E}$, то получим

$$\mathrm{E} = (A-D)^{-1} A\Phi - (A-D)^{-1} F. \tag{21}$$

Сходимость процесса уравновешивания определяется свойствами матрицы сходимости $P$:

$$P = (A-D)^{-1} A \tag{22}$$

и методом уравновешивания.

При больших числах Pe (быстродвижущиеся теплоисточники) конвективный член типа $\mathrm{Pe}\,\frac{\partial\sigma}{\partial\xi}$ в уравнении (2) (записанном в декартовой системе координат) значительно превышает соответствующую вторую производную $\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2}$, выражающую количество тепла, передаваемого теплопроводностью в направлении оси $\xi$. Поэтому этой последней производной по сравнению с $\mathrm{Pe}\,\frac{\partial\theta}{\partial\xi}$ можно прене-

бречь [8], тогда уравнение (2) принимает вид

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial F_0} + \mathrm{Pe}\,\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi} = \frac{\partial^2\vartheta}{\partial\eta^2} + P_0. \qquad (23)$$

В этом случае в соотношениях (13) можно положить

$$R_{12} = R_{11} = \infty,$$

что физически означает отсутствие электрического тока за счет электропроводности, являющейся аналогом теплопроводности, в направлении оси $\xi$.

Этот случай моделирования при $\mathrm{Pe} \to \infty$ будем называть предельным квазианалоговым методом.

Для квазистационарного теплового режима при постоянной теплопроводности и при $\mathrm{Pe} \to \infty$ из уравнения (23), положив $\frac{\partial\vartheta}{\partial F_0} = 0$, получим

$$|\mathrm{Pe}|\,\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi^*} = \frac{\partial^2\vartheta}{\partial\eta^2} + P_0, \qquad (24)$$

где

$$\xi^* \quad -\xi.$$

Уравнение (24) является дифференциальным уравнением параболического типа и само по себе может быть решено аналоговыми методами либо с помощью $RC$-сетки, либо на $R$-сетках методом Либманна [9].

Для моделирования же задачи контактного теплообмена двух тел аналоговый метод непосредственно применить не удается, поэтому авторами предлагается следующий квазианалоговый метод.

Электромоделирование в теле, связанном с подвижной системой координат, производится на обычной сетке из омических сопротивлений для решения уравнения Лапласа. Для тела, перемещающегося относительно подвижной системы координат, электромоделирование производится на $RC$- или $R$-сетках. Координатой, направленной по вектору скорости, для этого тела служит время $\tau$.

Равенство потенциалов, соответствующее равенству температур в месте контакта моделей, устанавливается путем итераций.

В зависимости от того, какие сетки применяются для моделирования уравнения (24), будем различать $RC$-предельный квазианалоговый метод и $R$-предельный квазианалоговый метод.

Принципиальная схема моделирования по $RC$-методу изображена на рис. 3.

На схеме модель первого из указанных тел обозначена $B$, второго $A$; I, II, III — платы шагового искателя, работающего в режиме периодизации.

Равенство электрических потенциалов, соответствующее равенству температур в точках контакта тел, достигается путем последовательных итераций.

При прохождении контакта модели $A$ по плате I шагового искателя, соединенной, например, с точкой 2, соответствующий кон-

такт $К_2$ реле $Р_2$ отключает потенциометр $П_2$ от модели $B$. После этого с помощью нуль-гальванометра производится установка потенциометра $П_2$ на потенциал, равный среднему значению потенциала в точке 2 на заданном отрезке времени $\frac{\Delta\xi^*}{\mathrm{Pe}} = \Delta\tau$. Все остальные потенциометры $П_n$ контактами $К_n$ соединены в это время с моделью $B$.

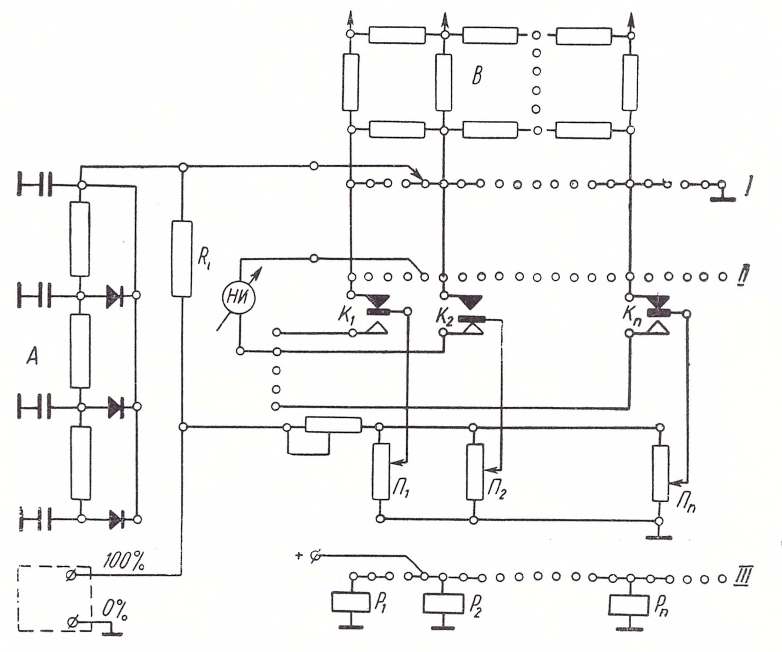



Рис. 3. Принципиальная схема моделирования по $RC$-методу.

После установки потенциометра $П_2$ таким же образом устанавливаются потенциалы на потенциометрах $П_3$, $П_4$ и т. д. Процесс установки потенциалов продолжается до их полной стабилизации.

Мощность теплоисточника трения $q$ иммитируется электрическим током, протекающим через сопротивление $R_i$.

Соответствующая схема электромоделирования по $R$-методу изображена на рис. 4. Группа потенциометров I служит для запоминания потенциалов в точках контакта моделей $A$ и $B$ при проведении процесса итераций, а группы потенциометров II и III для реализации решения нестационарной задачи на модели $A$ по методу Либманна [9].

В предлагаемых $RC$- и $R$-методах, в противоположность общему методу, итерации производятся не во всей области модели $A$ второго тела, а лишь на поверхности контакта моделей. Двухмерная задача для второго тела сводится к одномерной, а трехмерная — к двухмерной.

В ряде случаев, особенно при высоких температурах, в ходе решения задач контактного теплообмена необходимо учитывать зависимость теплопроводности тел от температуры. Для моделирования таких задач авторами также предложен излагаемый ниже квазианалоговый метод электромоделирования. Применение метода рассмотрим на примере краевой задачи теплопроводности в двух неподвижных контактирующих телах при граничных условиях первого и четвертого рода. (Этот метод легко обобщается на тот случай, когда одно тело перемещается по другому и на случай граничных условий второго рода — задание теплоисточников трения.)

На рис. 5 приводятся результаты решения нелинейной задачи теплопроводности в двух контактирующих телах, с различными теплофизическими свойствами.

Для двух контактирующих тел с различными коэффициентами теплопроводности, зависящими от температуры $\lambda_1 = \lambda_1(t)$ и $\lambda_2 = \lambda_2(t)$ (рис. 5), математическая формулировка задачи о теплообмене имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial y}\right) = 0, \tag{25}$$

$$t_{1w} = \text{const},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial y}\right) = 0, \tag{26}$$

$$t_{2w} = \text{const}, \tag{27}$$

а граничные условия на поверхности контакта двух тел запишутся так:

$$-\lambda_1\left(\frac{\partial t_1}{\partial n}\right) f = -\lambda_2\left(\frac{\partial t_2}{\partial n}\right) f, \tag{28}$$

$$t_{1f} = t_{2f} = t_f. \tag{29}$$

Эти уравнения можно линеаризировать путем введения переменных Г. А. Варшавского [10]

$$\Phi_1 = \int_0^{t_1} \lambda_1(t_1)\, dt_1 + \Phi_{10}, \tag{30}$$

$$\Phi_2 = \int_0^{t_2} \lambda_2(t_2)\, dt_2 + \Phi_{20}. \tag{31}$$

После введения переменных (30) и (31) и приведения системы уравнений (25)—(29) к безразмерному виду, получим

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \eta^2} = 0, \tag{32}$$

$$\theta_{1w} = \text{const}, \tag{33}$$

$$\frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \eta^2} = 0, \tag{34}$$

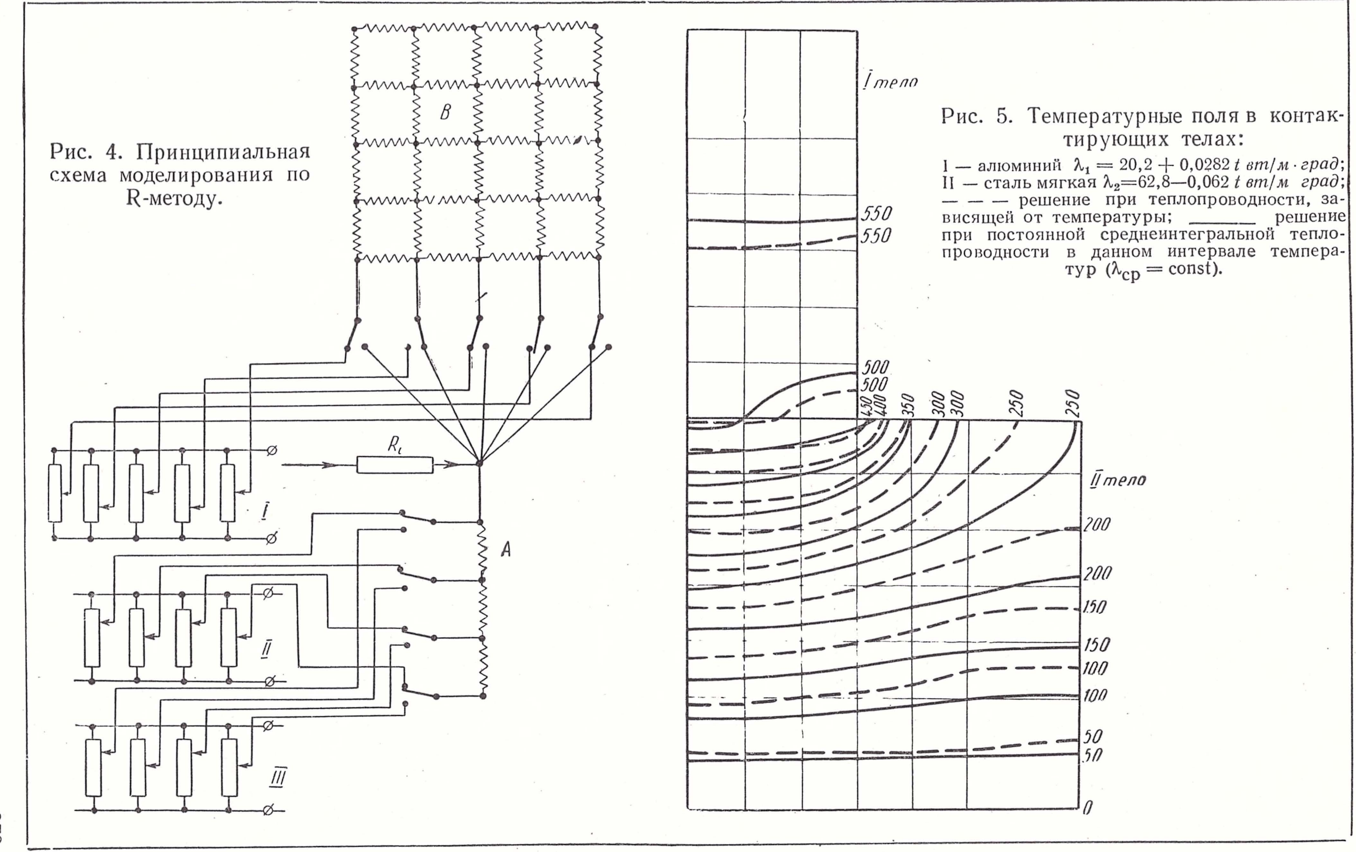



Рис. 4. Принципиальная схема моделирования по R-методу.

Рис. 5. Температурные поля в контактирующих телах:

I — алюминий $\lambda_1 = 20{,}2 + 0{,}0282\,t$ *вт/м · град*; II — сталь мягкая $\lambda_2 = 62{,}8 - 0{,}062\,t$ *вт/м град*; — — — решение при теплопроводности, зависящей от температуры; ——— решение при постоянной среднеинтегральной теплопроводности в данном интервале температур ($\lambda_{cp} = \text{const}$).

18 7-2622

$$\theta_{2w} = \text{const}, \tag{35}$$

$$\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial\nu}\right)_f = \left(\frac{\partial\theta_2}{\partial\nu}\right)_f, \tag{36}$$

$$t_{1f}(\theta_1) = t_{2f}(\theta_2) = t_f, \tag{37}$$

где

$$\theta_1 = \frac{\Phi_1 - \Phi_{10}}{\Phi_{1\text{м}} - \Phi_{10}};\ \theta_2 = \frac{\Phi_2 - \Phi_{10}}{\Phi_{1\text{м}} - \Phi_{10}};\ \zeta = \frac{x}{R};\ \eta = \frac{y}{R};\ \nu = \frac{n}{R}.$$

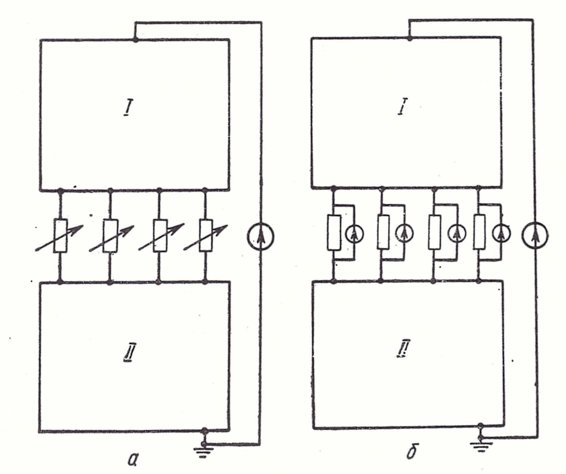



Рис. 6. Электрические схемы моделирования теплообмена при зависимости теплопроводности от температуры.

Соотношение (37) и перепишем в виде

$$\theta_{1f} - \theta_{2f} = \Delta\theta_f(t_f). \tag{38}$$

При моделировании линеаризированных уравнений переменным $\theta_1$ и $\theta_2$ приводятся в соответствие безразмерные электрические потенциалы $\overline{U}_1$ и $\overline{U}_2$. Так как в месте контакта двух тел, несмотря на равенство температур (37), $\theta_{1f} \neq \theta_{2f}$, то и электрические потенциалы в месте контакта моделей будут не равны, т. е.

$$U_{1f} \neq U_{2f}. \tag{39}$$

При этом могут встретиться два качественно различных случая:

1) ток течет от модели первого тела к модели второго, а

$$U_1 > U_2;$$

2) направление тока то же, а

$$U_1 < U_2.$$

Для образования на модели скачка потенциалов в первом случае предлагается использовать регулируемые омические сопротив-

ления по схеме рис. 6, *а* во втором — источники питания по схеме рис. 6, *б*.

В обоих случаях решение задачи ведется методом итерации до тех пор, пока во всех узловых точках контакта моделей не будет установлена разность потенциалов $\theta_{1f} - \theta_{2f}$ ; $(U_{1f} - U_{2f})$, соответствующая соотношению (38).

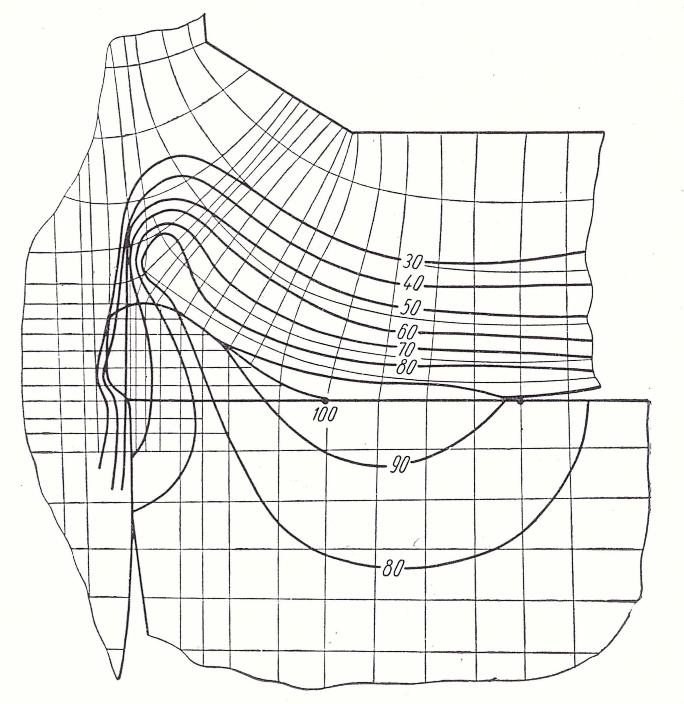



Рис. 7. Безразмерное температурное поле в зоне резания.

Предложенные квазианалоговые методы использовались для исследования ряда теплофизических задач теории резания и износа, представляющих научный и практический интерес.

На рис. 7 показано температурное поле в зоне резания при точении, полученное квазианалоговым методом. При решении этой задачи удалось учесть влияние нароста металла на режущей кромке резца и течения металла в стружку на температурное поле, что аналитическим путем чрезвычайно сложно сделать. Полученная моделированием картина температурного поля хорошо согласуется в качественном и количественном отношении с данными других исследователей [1]. Мощность теплоисточников при моделировании задавалась по известной методике [1].

На рис. 8, *а* и *б*, показаны результаты моделирования температурных полей в двух перемещающихся относительно друг друга

телах (двухмерная задача). В задаче принято, что в месте контакта тел, за счет сил трения образуется тепловой источник равномерной интенсивности. Моделирование производилось при Pe = 133 двумя квазианалоговыми методами: общим и $RC$-предельным методом.

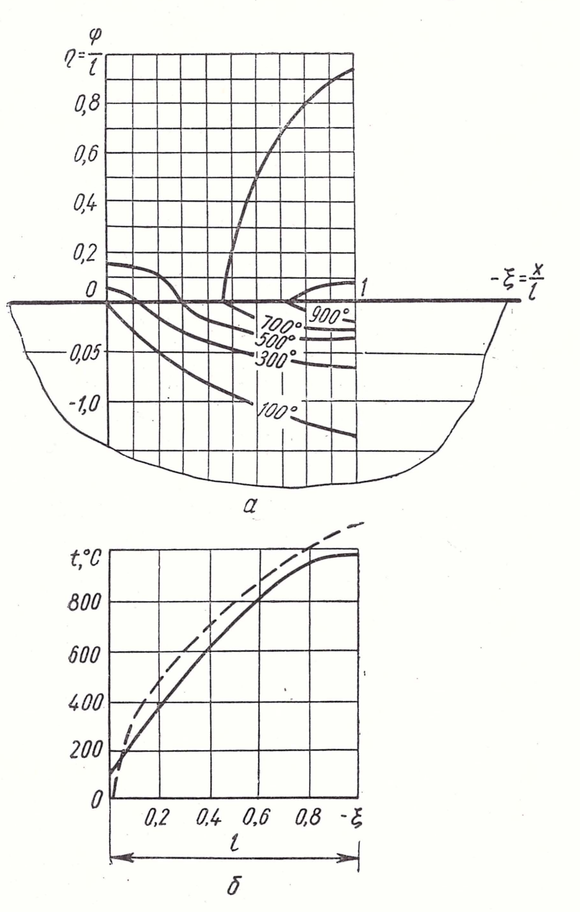



Рис. 8. Результаты моделирования теплообмена при трении двух тел:
——— моделирование общим квазианалоговым методом;
— — — моделирование по $RC$-предельному методу.

Результаты решений при выбранном шаге сетки отличаются друг от друга максимально на 11,1%.

Температурное поле, возникающее в тонком кольце при движении по нему точечного теплоисточника, показано на рис. 9. Сравнение данных моделирования с приведенными на этом же рисунке данными аналогического решения этой задачи, показывает, что по-

грешность решения не превышает 10,8%. Ее можно еще снизить путем выбора более мелкого шага.

Как видно из приведенных примеров, квазианалоговые методы можно использовать для решения широкого круга задач технологической теплофизики.

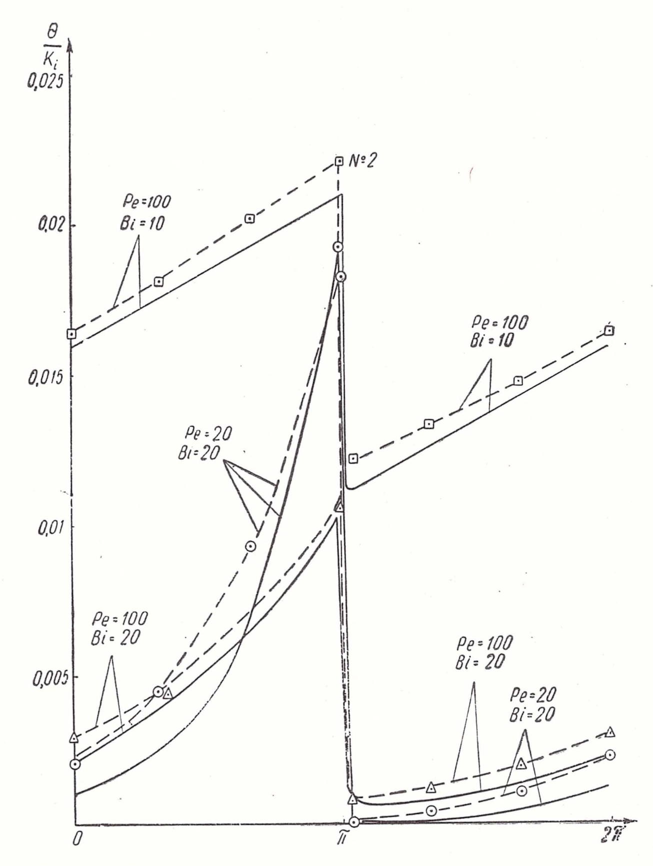



Рис. 9. Температурное поле в тонком кольце при движении по нему точечного теплоисточника:
— — — результаты электромоделирования; ——— аналитическое решение.

При этом не накладывается никаких ограничений на величину скорости перемещения теплоисточников и на скоростное поле вообще (вектор скорости может зависеть как от координат, так и от времени).

Кроме того, квазианалоговыми методами могут успешно решаться нелинейные задачи теплопроводности.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Резников А. Н. Теплообмен при резании и охлаждении инструментов. Машгиз, М., 1963.
2. Резников А. Н., Темников А. В., Лимонов И. П.— Новое в резании металлов и пластмасс, Куйбышев, 1963.
3. Резников А. Н., Темников А. В., Лимонов И. П., Дилигенский Н. В.— Вестник машиностроения, 1963, 11, 43.
4. Paschkis V. Temperature distribution in the Workpiece Study by means electric analogy. Research report, November, 1954.
5. Johnson W. C., Alley R. E. Ir Au Electicol Method for the Solution of Differeutial Equations, Kept. 3. ONR Contract N 6 ori — 105, Task Order VI, Princeton, N, I. 1948.
6. Коздоба Л. А., Махненко В. И.— ИФЖ, 1961, 4, 11, 94.
7. Пухов Г. Е.— В кн.: Электрическое моделирование. Вып. 1. Киевский институт гражданского воздушного флота, К., 1962.
8. Рыкалин Н. Н. Тепловые основы сварки. Изд-во АН СССР, М., 1947.
9. Liebmann — Trans. ASME, 1956, 78, 3, 655.
10. Варшавский Г. А.— ЖЭТФ, 1936, 6, 3.

# ЭЛЕКТРОМОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ НА СЕТКАХ ОМИЧЕСКИХ СОПРОТИВЛЕНИЙ И КОМБИНИРОВАННЫХ МОДЕЛЯХ

И. Д. КОНОПЛЕВ

Определение температурного поля в общем случае сводится к решению дифференциального уравнения вида

$$\nabla^2 T = \frac{C\gamma}{\lambda} \cdot \frac{\partial T}{\partial \tau}, \qquad (1)$$

где $T$ — температура; $C$ — теплоемкость; $\gamma$ — удельный вес; $\lambda$ — коэффициент теплопроводности; $\tau$ — время, при заданных граничных условиях I—IV рода.

Методика электромоделирования уравнения (1) приведена в работе [1].

Ниже указаны возможности решения на таких же, как в работе [1] сеточных или комбинированных (электропроводная бумага — сетка омических сопротивлений) моделях последовательной задачи о температурном поле и термических напряжениях, вызванных действием поля температур.

Рассмотрим уравнения плоской задачи термоупругости в напряжениях с помощью функции напряжений $\varphi$ [2], которая удобна в случае когда граничные условия заданы в напряжениях:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = -E\alpha(\nabla^2 T). \qquad (2)$$

Граничные условия при решении (2) имеют вид

$$\varphi_{гр} = f_1(S) \frac{\partial \varphi}{\partial n} = f_2(S); \qquad (3)$$

Здесь $n$ — нормаль к контуру.

Представим уравнение (2) в виде двух гармонических уравнений

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} = -E\alpha(\nabla^2 T), \qquad (4)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \sigma, \qquad (5)$$

где $\sigma = \sigma_{xx} + \sigma_{yy}$ — сумма нормальных напряжений; $E$ — модуль упругости; $\alpha$ — коэффициент температурного удлинения.

Записывая (4) в конечных разностях для конечно-разностной разбивки области, представленной на рис. 1, *а* с учетом $\Delta x = \Delta y = 1$, получим

$$\sigma_1 - \sigma_0 + \sigma_2 - \sigma_0 + \sigma_3 - \sigma_0 + \sigma_4 - \sigma_0 + \\ + E\alpha [T_1 + T_2 + T_3 + T_4 - 4T_0] = 0. \quad (6)$$

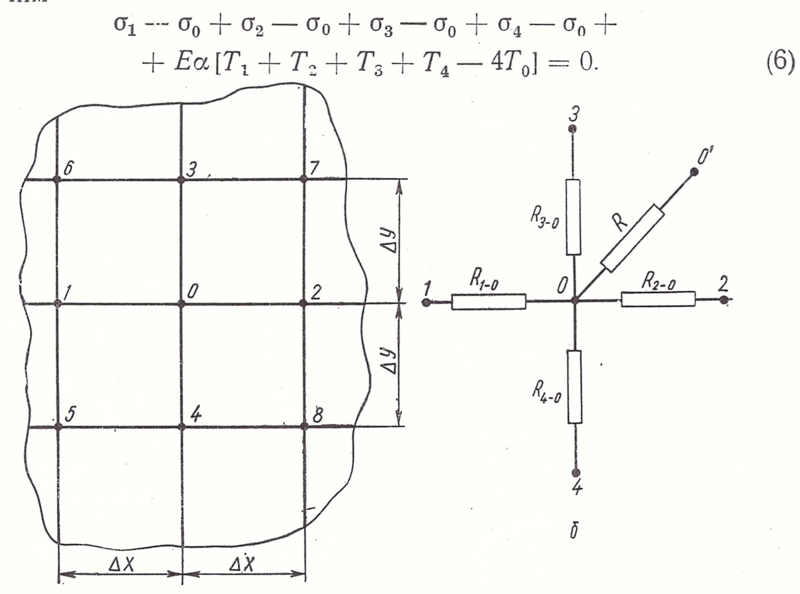



Рис. 1.

Записывая закон Кирхгофа для узла сетки омических сопротивлений (рис. 1, *б*), получим

$$\frac{V_1 - V_0}{R_{1-0}} + \frac{V_2 - V_0}{R_{2-0}} + \frac{V_3 - V_0}{R_{3-0}} + \frac{V_4 - V_0}{R_{4-0}} + \frac{V_0 - V_{0'}}{R_{0-0'}} = 0. \quad (7)$$

Для аналогии (6) и (7) необходимо, чтобы

$$R_{0-0'} = R_{1-0} = R_{2-0} = R_{3-0} = R_{4-0} = 1 \cdot R_N, \quad (8)$$

$$V_0 - V_{0'} = E\alpha (T_1 + T_2 + T_3 + T_4 - 4T_0)\, m_э. \quad (9)$$

Здесь $R_N$ — масштаб сопротивлений; $m_э$ — масштаб напряжений; $R_0$ — сопротивление 1 $см^2$ электропроводной бумаги.

Запишем уравнение (5) в конечных разностях для разбивки области, показанной на рис. 1, *а*. Учитывая, что $\Delta x = \Delta y = 1$, получим

$$\varphi_1 - \varphi_0 + \varphi_2 - \varphi_0 + \varphi_3 - \varphi_0 + \varphi_4 - \varphi_0 - \sigma_0 = 0. \quad (10)$$

Для аналогии (10) и (7) необходимо, чтобы

$$R_{0-0'} = R_{1-0} = R_{2-0} = R_{3-0} = R_{4-0} = 1 \cdot R_N, \quad (11)$$

$$V_0 - V_{0'} = -\sigma_0 m_э. \quad (12)$$

Задача решается методом последовательных приближений. В первом приближении на сетке омических сопротивлений, рассчитанной по формуле (8), решается уравнение (4), для чего на концах сопротивлений $R_{0-0'}$ устанавливается разность потенциалов, подсчитанная по формуле (9), куда значения температур подставляются из найденного при решении уравнения теплопроводности температурного поля. На границе области задается значение $\sigma_{гр}$, переведенное в потенциалы; затем на этой же сетке решается уравнение (5), для чего на концах сопротивлений $R_{0-0'}$ устанавливается разность потенциалов, подсчитанная по формуле (12), куда подставляются значения $\sigma_0$, полученные при решении уравнения (4), а на границе области задается значение функции напряжений, переведенное в потенциалы из известных граничных условий (2).

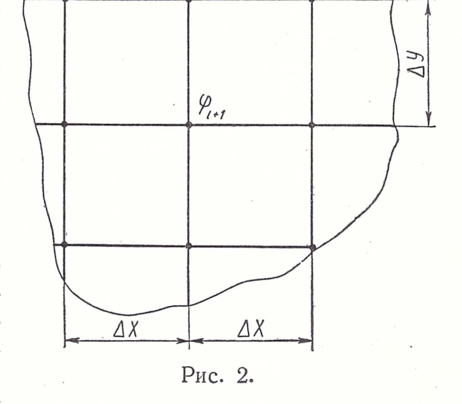



Рис. 2.

Во втором приближении задача решается точно так же, как и в первом приближении, однако значение $\sigma_{гр}$ для второго приближения определяется с помощью известного из граничных условий (2) значения нормальной производной функции напряжений, при использовании полученных в первом приближении значений функции напряжений в предконтурных точках.

Рассмотрим участок границы, представленный на рис. 2. Значения функции напряжений в законтурных точках найдем, используя известное из граничных условий значение производной функции по нормали к контуру, для чего запишем в конечных разностях значение $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ для $i$-й точки границы

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_i = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_i = \frac{\varphi_{i+1} - \varphi'_{i+1}}{2\Delta y}, \tag{13}$$

откуда получим

$$\varphi'_{i+1} = \varphi_{i+1} - 2\Delta y\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_i. \tag{14}$$

Так как $\sigma_{xx} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$ и $\sigma_{yy} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$, то записав эти значения в конечных разностях, получим

$$\sigma_{гр} = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})_{гр} = \frac{\varphi'_{грi} - 2\varphi_{грi} + \varphi''_{грi}}{\Delta x^2} + \frac{\varphi'_{i+1} - 2\varphi_{грi} + \varphi_{i+1}}{\Delta y^2}. \tag{15}$$

Исходя из уравнения (15), получим значение $\sigma_{\text{гр}}$ (при $\Delta x = \Delta y = 1$):

$$\sigma_{\text{гр}} = \varphi'_{\text{гр}i} + \varphi''_{\text{гр}i} + 2\varphi_{i+1} - 2\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_i - 4\varphi_{\text{гр}i}. \tag{16}$$

Определив значение $\sigma_{\text{гр}}$ по формуле (16), задаем их в граничные точки модели и получаем значение суммы нормальных напряжений во втором приближении. Затем находим значение функции напряжений во втором приближении и т. д.

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока значение функций напряжений не отличается в двух последовательных приближениях.

Эта же методика применима и при решении задачи на комбинированных моделях (электропроводная бумага — сетка омических сопротивлений).

Для построения модели из электропроводной бумаги вырезается область, геометрически подобная исследуемой, которая условно разбивается сеткой так же, как и в случае моделирования на сеточной модели. В узлы плоской модели, полученные в результате разбивки, подводятся дискретные сопротивления, которые определяются по формуле (11), однако значение $R_N$ выбирается не произвольно, а в зависимости от свойств электропроводной бумаги по формуле

$$R_N = \frac{R_0}{m}.$$

Для проверки методики было проведено решение задачи о термических напряжениях в бесконечной полосе постоянной толщины и ширины, в которой температурное поле является одномерным. Сравнение результатов электромоделирования и точного аналитического решения показывает, что максимальная относительная погрешность не превышает 2%.

Были определены также напряжения в железобетонной балке-стенке, находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки. Решение методом электромоделирования сравнивалось с численным решением этой же задачи, приведенным в работе [3]. Средняя относительная погрешность оказалась равной 3%.

При известных граничных условиях в перемещениях плоскую задачу теории термоупругости удобнее формулировать [2] в перемещениях:

$$\frac{E}{1-\nu^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{E}{2(1+\nu)}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{E}{2(1-\nu)}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\alpha E}{1-\nu}\cdot\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \tag{17a}$$

$$\frac{E}{1-\nu^2}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{E}{2(1+\nu)}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} +$$

$$+\frac{E}{2(1-\nu)}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\alpha E}{1-\nu}\cdot\frac{\partial T}{\partial y}=0; \qquad (17б)$$

$\nu$ — коэффициент Пуассона.

Запишем уравнение (17а) и (17б) в конечных разностях для разбивки области, представленной на рис. 1, *а*, с учетом $\Delta x = \Delta y = 1$ получим

$$\frac{E}{1-\nu^2}(u_1-u_0)+\frac{E}{1-\nu^2}(u_2-u_0)+\frac{E}{2(1+\nu)}(u_3-u_0)+$$
$$+\frac{E}{2(1+\nu)}(u_4-u_0)+\frac{E}{2(1-\nu)}(v_8-v_4-v_2+v_0)-$$
$$-\frac{\alpha E}{1-\nu}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_0=0, \qquad (18а)$$

$$\frac{E}{1-\nu^2}(v_3-v_0)+\frac{E}{1-\nu^2}(v_4-v_0)+\frac{E}{2(1+\nu)}(v_1-v_0)+$$
$$+\frac{E}{2(1+\nu)}(v_2-v_0)+\frac{E}{2(1-\nu)}(u_8-u_4-u_2-u_0)-$$
$$-\frac{\alpha E}{1-\nu}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_0=0. \qquad (18б)$$

Для аналогии уравнений (18а) и (6), а также (18б) и (6) необходимо значения сопротивлений для сетки «*u*» и «*v*» определять по формулам:

$$R^{«u»}_{1-0}=R^{«u»}_{2-0}=R^{«v»}_{3-0}=R^{«v»}_{4-0}=\frac{1-\nu^2}{E}\cdot R_N, \qquad (19)$$

$$R^{«v»}_{1-0}=R^{«v»}_{2-0}=R^{«u»}_{3-0}=R^{«u»}_{4-0}=\frac{2(1+\nu)}{E}\cdot R_N, \qquad (20)$$

$$R^{«u»}_{0-0'}=R^{«v»}_{0-0'}=\frac{2(1-\nu)}{E}\cdot R_N, \qquad (21)$$

$$(V_0-V_{0'})^{«v»}=\left[(u_8-u_4-u_2+u_0)-2\alpha\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_0\right]m_э, \qquad (22)$$

$$(V_0-V_{0'})^{«u»}=\left[(v_8-v_4-v_2+v_0)-2\alpha\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_0\right]m_э, \qquad (23)$$

«*u*» — перемещения вдоль оси *x*; «*v*» — перемещения вдоль оси *y*.

Решение задачи проводится на двух сетках методом последовательных приближений. Собирается сетка для определения перемещений «*u*» и сетка для определения перемещений «*v*», сопротивления которых рассчитываются по формулам (19)—(21). В первом приближении на границы сетки «*u*» задаются граничные значения перемещения «*u*», переведенные в потенциалы, а на границы сетки «*v*» — граничные значения перемещения «*v*», переведенные в потенциалы. На концах сопротивлений $R_{0-0'}$ сетки «*u*» устанавливается разность потенциалов, подсчитанная по формуле (23), где значение переме-

щения «$v$» принимаются равными нулю, а на концах сопротивлений $R_{0-0'}$ сетки «$v$» устанавливается разность потенциалов, подсчитанная по формуле (22), где значения перемещения «$u$» принимаются равными нулю.

Во втором приближении на концах сопротивлений $R_{0-0'}$ устанавливается разность потенциалов, подсчитанная по формуле (23) для сетки «$u$» и формуле (22) для сетки «$v$»; при этом значения перемещений берутся из первого приближения. Итерационный процесс считается законченным, когда перемещения «$u$» и «$v$» в двух последовательных приближениях не отличаются.

В качестве примера были найдены перемещения в прямоугольной пластине постоянной толщины, находящейся под действием одномерного линейного температурного поля. Эта задача имеет точное аналитическое решение [4]. Сравнение результатов точного аналитического решения и электромоделирования показало, что средняя относительная погрешность не превышает 3%.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Коздоба Л. А. Электромоделирование температурных полей. «Судостроение», Л., 1964.
2. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. «Мир», М., 1964.
3. Жемочкин Б. Н. Теория упругости. Госстройиздат, М., 1957.
4. Лебедев Н. Н. Температурные напряжения в теории упругости. ОНТИ, М.— Л., 1937.

Доложено на семинаре
18 марта 1966 г.

# КОМПЛЕКС УСТРОЙСТВ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ СЕТОЧНЫХ АНАЛОГОВЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИН

Э. С. КОЗЛОВ

Сеточные аналоговые вычислительные машины (САВМ), как известно, в настоящее время весьма эффективно используются для решения и анализа практических инженерных задач, сводимых к уравнениям математической физики. В силу этого они широко применяются в целом ряде отраслей народного хозяйства: нефте- и газодобывающей промышленности, химии, строительной физике, геологии и других.

САВМ в принципе являются машинами, специализированными для конкретных типов задач. Однако дальнейшее углубление специализации их по спецификации различных потребителей в настоящее время вызывает затруднения как в организации промышленного выпуска малых серий машин, так и из-за большого разнообразия специфических требований к машине при решении различных задач.

Поэтому малые машины и специализированные электромоделирующие устройства должны создаваться наряду с крупными машинами и системами. Это может наиболее полно удовлетворить растущие потребности в аналоговых средствах для решения краевых задач.

Расширение круга решаемых задач приводит к необходимости применения наряду с методом «прямого моделирования», основанного на аналогии физических процессов, также и других методов решения краевых задач, в особенности нелинейных, для которых представляется наиболее целесообразной реализация метода дискретного представления времени («шаг за шагом»). Метод «прямого моделирования» наиболее целесообразен для решения линейных стационарных и нестационарных задач, тогда как для решения сложных нелинейных краевых задач значительно более удобно использовать метод «шаг за шагом», по своему существу приближающийся к численным методам решения и обладающий известной универсальностью. Решение задач Стефана может быть осуществлено методом

непрерывного моделирования при помощи специальной сетки сопротивлений.

Для удовлетворения потребности различных организаций в решении краевых задач ранее была разработана универсальная сеточная электромодель УСМ-1, предназначенная, главным образом, для решения линейных нестационарных краевых задач (уравнений в частных производных параболического типа) методом непрерывного моделирования правой части уравнений с помощью емкостей.

Блок дополнительной сетки модели объемом около 350 узловых точек послужил основой для минимального комплекта, служащего для решения уравнения эллиптического типа и заменившего выпускавшийся до этого сеточный электроинтегратор ЭИ-12 [1]. Электромодели выпускаются серийно и многие из них в настоящее время находятся в эксплуатации в различных организациях. Конструктивной особенностью электромодели УСМ-1 является блочно-секционный принцип ее построения, что принципиально давало возможность комплектации машины с учетом специфики каждого потребителя. При этом предусматривалась некоторая динамичность комплектации сетки, а также устройств задания граничных условий.

Являясь первым опытом создания и эксплуатации сеточных АВМ блочно-секционного типа, машина УСМ-1, естественно, имела ряд недостатков, затруднявших комплектацию и использование ее разнообразными по специфике организациями.

Современное развитие областей техники ставит все новые задачи, сводящиеся к решению уравнений в частных производных.

Если, например, несколько лет назад практические задачи подземной гидравлики линеаризировались и успешно решались имевшимися техническими средствами, то теперь на первом плане стоят проблемы решения нелинейных краевых задач с нелинейными параметрами области

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[A_{(x,y,P,\,t)}\frac{\partial P}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[A_{(x,y,P,\,t)}\frac{\partial P}{\partial x}\right]=a^2_{(x,y,P,t)}\frac{\partial P}{dx};$$

с переменными и нелинейными граничными условиями

$$U\big|_{\Gamma}=\varphi_1(x,y,t),$$

$$\frac{\partial U}{\partial n}\bigg|_{\Gamma}=\varphi_2(x,y,t,U).$$

Впервые задание нелинейных граничных условий вида

$$\frac{\partial U}{\partial n}\bigg|_{\Gamma}=\alpha(t,S)\,[f(t,S)-U(t,S)]-\beta(S)^n(t,S)$$

было реализовано при решении тепловых задач на машине УСМ-1. Для этого была специально спроектирована и изготовлена дополнительная нелинейная приставка, позволившая воспроизвести операции умножения, нелинейного преобразования и суммирования.

Подобные задачи все чаще возникают в различных отраслях техники и требуют разработки новых методов и алгоритмов решения краевых задач и новых технических средств, специализированных для конкретных целей. Это приводит к необходимости расширения типов и функциональных возможностей сеточных аналоговых вычислительных машин для реализации ими различных методов решения краевых задач. Хорошо известный метод непрерывного представления времени получил широкое распространение при решении линейных краевых задач из-за простоты и наглядности аппаратурных решений, малого, практически мгновенного времени решения. Однако при моделировании задач с нелинейными параметрами области этим методом возникают сильные осложнения в связи с необходимостью применения в массовом количестве быстродействующих коммутационных элементов для переключения сопротивлений и емкостей сетки. Поэтому для решения задач с нелинейными параметрами области следует считать более целесообразным применение метода дискретизации времени («шаг за шагом»). Он позволяет заменить текущее время моделируемого процесса рядом фиксированных стационарных состояний и, таким образом, свести исследуемую задачу к решению серии уравнений эллиптического типа.

Применение метода дискретизации времени позволяет принципиально довольно просто реализовать решение нелинейных краевых задач. Прогрессивными методами, которые можно использовать для решения краевых задач с нелинейными параметрами области, являются методы квазианалогового моделирования, разработанные Г. Е. Пуховым и метод дополнительных токовводов Л. В. Ницецкого, представляющий разновидность предыдущих. Однако указанные методы в настоящее время требуют уточнения и проверки для возможности использования их при решении сложных нелинейных краевых задач типа нефтяных задач подземной гидравлики.

Большие объемы информации, достигающие в некоторых нефтяных задачах миллионов чисел, необходимость во многих случаях поэтапного решения задач и учета в задачах дополнительных функциональных зависимостей выдвигает на первый план вопросы автономной и комплексной автоматизации процессов решения нелинейных задач.

Некоторые операции процесса решения сравнительно легко поддаются автоматизации, другие требуют значительного количества электронной аппаратуры, что, естественно, ведет к повышению стоимости машины.

К числу первых относятся устройства, обрабатывающие результаты решения. Результат решения в виде потенциалов узловых точек сетки передается автоматическим коммутатором на быстродействующее автоматическое измерительное устройство, имеющее выходы на визуальную индикацию, печать и на ЦВМ или другие устройства (рис. 1). Нахождение и построение эквипотенциальных

и силовых линий также должно быть автоматизировано, равно как и задание граничных условий, являющееся довольно трудоемкой, утомительной и однообразной операцией.

Сложность автоматизации перебора сетки в первую очередь вызвана необходимостью введения в состав сетки огромного количества коммутирующих элементов (порядка 40—50 штук на одну узловую точку). Сложность технического решения усугубляется отсутствием надежных, дешевых и быстродействующих коммутирующих элементов.

Специфичные условия работы коммутирующих элементов в сетке сопротивлений препятствуют применению бесконтактных клю-

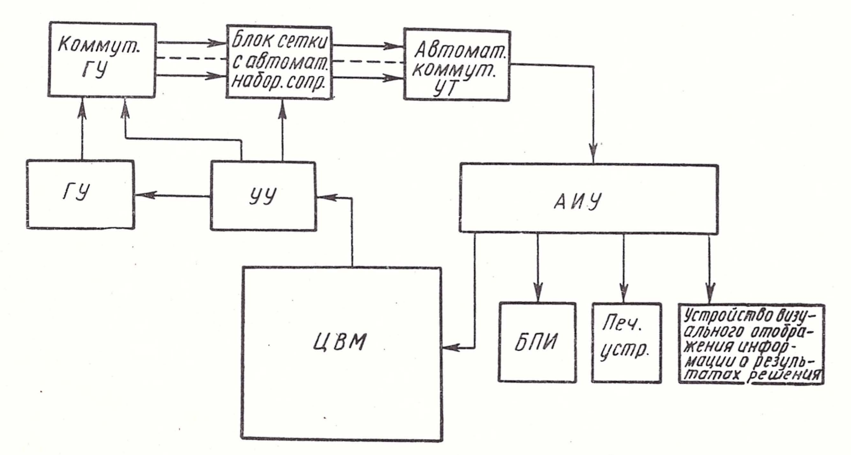



Рис. 1. Блок-схема аналого-цифрового комплекса для решения нелинейных краевых задач.

чей, имеющих конечное обратное (5—10 *Мом*) и значительное прямое (5—15 *ом*) сопротивления, соизмеримые с сопротивлениями сетки. Весьма перспективным представляется использование в качестве коммутирующих элементов для перебора сопротивлений сетки безъякорных герметизированных реле (язычковых), по своим параметрам приближающихся к бесконтактным ключевым элементам, однако в настоящее время отсутствует реальная возможность практического использования этих элементов в связи с недостаточностью их промышленного выпуска.

Комплект устройств для построения сеточных АВМ (табл. 1) предназначен для построения различных по объему аппаратуры и назначению электромоделирующих установок от простейших с малым числом узловых точек сетки и ручным управлением до автоматизированных аналого-цифровых вычислительных комплексов (АЦВК). Набор устройств позволяет воспроизводить различные функциональные зависимости изменения граничных условий, в том числе нелинейно зависящие от искомых потенциалов сетки, а также

строить различные автоматизированные электромодели. Сетка с автоматическим набором параметров области позволяет моделировать сложные нелинейные зависимости параметров поля и рассчитана на использование в составе АЦВК.

Таблица 1

| Полное наименование | Сокращенное наименование |
|---|---|
| Блок сетки с ручным набором сопротивлений | БС-256 |
| | БС-512 |
| | БС-1024 |
| | БС-8192 |
| Блок автоматической сетки сопротивлений | БС-1024А |
| Блок емкостей | БЕ-256 |
| Блок граничных условий с ручным набором | БГУ-64 |
| Блок граничных условий с автоматическим вводом | БГУ-64А |
| Блок нелинейных граничных условий | БНГУ-16 |
| Блок нелинейных параметров области | БНПО-128 |
| Автоматическое измерительное устройство с коммутатором узловых точек | АИУ-1 |
| | АИУ-2 |
| Полуавтоматическое измерительное устройство | АИУ-3 |
| Печатающее устройство | ПЧУ |
| Блок поиска и регистрации эквипотенциальных и силовых линий | |
| Индикатор нестационарного режима ручного обслуживания | ИНСР |
| Измерительное устройство стационарного режима ручного обслуживания | РИУ |

Блоки сеток с ручным набором области выполняются из унифицированных деталей и узлов. Основным модулем является сетка на 256 узловых точек. Каждый блок содержит встроенные магазины сопротивлений, коммутационные панели и делители задания граничных условий и, таким образом, представляет собой законченную установку, способную решать уравнения эллиптического типа. Диапазон изменения сопротивлений сетки около $2 \cdot 10^3$ раз. Блоки сетки могут иметь добавочные сопротивления, позволяющие производить дополнительные соединения, например образовывать трехмерные области, многократные переходы для сопротивления сеток с разными шагами и т. п. Отсутствие в блоках емкости узловых точек и аппаратура задания начальных условий унифицирует и удешевляет их. Аппаратура внесена в специальный блок емкостей БЕ-256, который содержит 256 магазинов емкостей, устройства их разряда, задания начальных условий и управления по времени. Диапазон изменения емкостей существенно расширен по сравнению

с машиной УСМ-1. С целью уменьшения погрешностей задания начальных условий и правой части уравнения параболического типа значения емкостей выбраны большими (наибольшая емкость может составить около 10 *мкф*). Применение больших емкостей вместе с заданием начальных условий методом предварительного заряда емкостей позволяет получить существенно меньшие величины погрешностей задания начальных условий по сравнению с существующими электромодулирующими устройствами. Большие емкости вызывают необходимость увеличения времени решения $\tau_1$ до 2—10 *сек*, что затрудняет непосредственное наблюдение искомых функций. Однако наличие быстродействующих автоматических измерительных устройств позволяет даже сократить общее время решения задачи по сравнению с аналогичными режимами работы машины УСМ-1. Для визуального наблюдения медленно протекающих решений имеется принципиальная возможность выполнить устройство трансформирования временного масштаба искомой функции с последующим просмотром на экране индикатора.

Блок автоматизированной сетки сопротивлений рассчитан на совместную работу с автоматическим измерительным устройством через автоматический коммутатор узловых точек и с цифровой вычислительной машиной. Комплекс БС-1024А—ЦВМ является основным элементом структурной схемы АЦВК, предназначенного для решения нелинейных краевых задач. В числе исходной информации об условиях задачи задаются кодовые значения параметров из ЦВМ в устройства адреса и занесения параметров автоматической сетки. По окончании отработки элементами сетки этих значений на ней устанавливаются значения потенциалов, соответствующих времени $\Delta t$ (решение ведется методом «шаг за шагом»), которые с помощью автоматического измерительного устройства с коммутатором узловых точек кодируются и отсылаются в ЦВМ для обсчета значений параметров задачи, в том числе области, для следующего шага по времени. По соответствующим функциональным зависимостям происходит управление режимами каналов граничных условий, их расположением в исследуемой области и т. п. Необходимые значения потенциалов узловых точек области могут фиксироваться в оперативном накопителе комплекса. Блок автоматической сетки содержит автоматически управляемые магазины сопротивлений, работающие от адресного устройства и устройства занесения информации. По соответствующим командам от ЦВМ выбирается адрес нужного магазина сопротивлений $R_x$, $R_y$ и $R_t$, а также адрес устройства задания начальных значений потенциалов узловой точки $U_t$.

Устройство занесения параметра отсылает по выбранному адресу значение кода параметра, который отрабатывается выбранной схемой в виде соответствующей величины проводимости или напряжения. Блок автоматической сетки конструктивно составляется из шкафов по 128 узловых точек в каждом.

Блок автоматического задания граничных условий представляет собой группу каналов выдачи токов, пропорциональных подаваемым на их входы напряжениям. Блок содержит 64 канала задания тока. Выходные токи распределяются коммутатором каналов ГУ по узловым точкам сетки по командам, поступающим из ЦВМ. Канал-стабилизатор тока представляет собой транзисторную схему с обратной связью, преобразующую выходное напряжение в выходной ток, пропорциональный приложенному на вход напряжению. Точность преобразования $\pm$ 0,5%; ста процентам выходного тока соответствует $\pm$5 *ма* при входных напряжениях $\pm$10 *в*.

На входы каналов подаются напряжения, пропорциональные получаемым от ЦВМ кодам амплитудных значений граничных условий от цифро-аналоговых преобразователей.

Блок граничных условий с ручным набором содержит по 64 канала задания граничных условий первого и второго рода, отрабатывающих на выходах соответственно напряжение и ток, пропорциональные поданным на их входы сигналам. Блок, кроме того, содержит необходимые устройства для задания программ входных сигналов и управления каналами по времени по принципу, аналогичному примененному в машине УСМ-1.

Блок нелинейных граничных условий представляет собой набор аналогичных и дискретных устройств для воспроизведения шестнадцати различных функциональных зависимостей изменения граничных условий $U_{\text{вых}} = f\,(U_{\text{вх}},\ t)$. Выходные напряжения каналов подаются на входы каналов граничных условий первого или второго рода.

Блок нелинейных параметров области служит для моделирования задач с подвижными границами фазовых переходов (задачи Стефана) методом непрерывного представления времени.

Сущность метода решения задачи Стефана заключается в том, что имеется сетка сопротивлений и емкостей, содержащая дополнительные сопротивления для каждого шага, дополнительные емкости, а также устройства моделирования скрытой теплоты плавления (рис. 2). Дополнительные сопротивления $R_x^{'}$ и $R_y^{'}$ и емкости $C'$ служат для моделирования изменения теплофизических свойств вещества исследуемого объекта, претерпевшего фазовое превращение. Дополнительные сопротивления и емкости коммутируются специальными ключами $К_1 — К_3$, управляемыми устройствами моделирования скрытой теплоты плавления. Устройство моделирования скрытой теплоты плавления (отвердевания) представляет собой интегратор, включаемый входом в узловую точку сетки. Состояние схемы, когда сопротивления шагов сетки равны $R_x$ и $R_y$, емкость равна $C$, а добавочные сопротивления и емкости $R_x^{'}$, $R_y^{'}$ и $C'$ отключены от сетки, соответствует одному агрегатному состоянию элемента области. Подключение к узловой точке области, являющейся центром элемента пространства, входа интегрирующего усилителя эквивалентно

состоянию наличия границы фазового перехода в пределах этого элемента. Наконец, подключение к исходным сопротивлениям $R_x$ и $R_y$ и емкости $C$ элемента добавочных сопротивлений $R_x'$ и $R_y'$ и емкости $C'$ и отключение от узла сетки интегратора характеризует полное завершение фазового превращения в части исследуемого пространства, эквивалентного элементу сетки. Моделирование начала вступления границы фазового перехода в пределы рассматриваемого элемента пространства осуществляется подсоединением

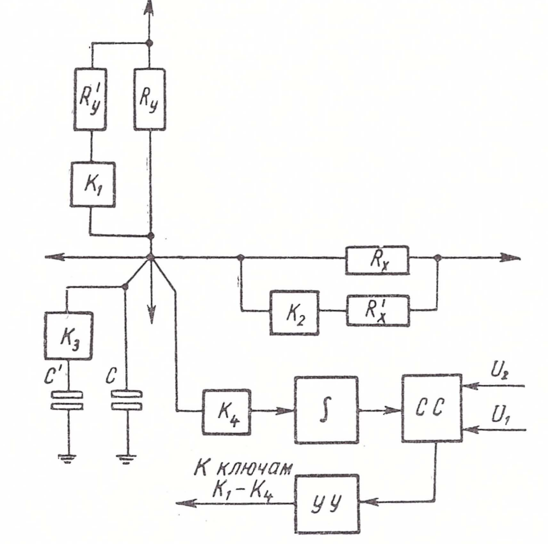



Рис. 2. Схема узловой точки сеточной электромодели для решения задачи Стефана.

входа интегратора к узловой точке сетки сигналом схемы сравнения (обычно при равенстве нулю потенциала узловой точки). На выходе интегратора при этом получается напряжение, пропорциональное интегральному значению входного тока, являющегося эквивалентом разностного теплового потока в уравнении теплового баланса для элементарной площадки области решаемой задачи. Это интегральное значение, взятое в определенных пределах, устанавливаемых заранее, является аналогом скрытой теплоты плавления для выбранной элементарной площадки области

$$Q_c = k\int_{U_1}^{U_2}\left(\sqrt{\frac{\Delta U_x^2}{R_{1x}^2}+\frac{\Delta U_y^2}{R_{1y}^2}}-\sqrt{\frac{\Delta U_x^2}{R_{2x}^2}+\frac{\Delta U_y^2}{R_{2y}^2}}\right)dt.$$

Выходное напряжение интегратора сравнивается схемами сравнения (СС) с заданными потенциалами $U_1$ и $U_2$. Критерием полного прохождения границы фазового перехода по элементарной площад-

ке области служит измерение выходного сигнала от потенциала $U_1$ до потенциала $U_2$ (или наоборот); при этом схема сравнения выдает сигнал на переключение сопротивлений сетки и отключение от нее схемы моделирования скрытой теплоты плавления.

Измерение и регистрация результатов решения краевых задач производится измерительными устройствами стационарного режима, индикаторами ручного обслуживания нестационарного режима и автоматическими измерительными устройствами.

Первые два устройства ручного обслуживания являются транзисторными аналогами соответствующих устройств машины УСМ-1. Автоматические устройства АИУ-1, АИУ-2, АИУ-3 представляют собой аналого-цифровые преобразователи.

Автоматическое измерительное устройство АИУ-1 служит для измерения и регистрации результатов решения нестационарных задач. Оно измеряет мгновенные значения искомых функций времени и регистрирует полученные значения с помощью печатающего устройства, а также выдает замеренные значения в виде двоичных кодов в ЦВМ или другие устройства.

Кодовый эквивалент измеряемого напряжения выдается 10-разрядным двоичным кодом, из которых один разряд — знаковый. Время одного измерения порядка 100 *мксек*. Устройство АИУ-2 не может производить программного измерения по времени. Оно измеряет только постоянные напряжения и применяется для работы с автоматической сеткой. Остальные параметры аналогичны АИУ-1. Устройство АИУ-3 представляет собой цифровой вольтметр и предназначено для работы с сетками ручного набора при решении на них стационарных задач на переменном токе.

Блок поиска и регистрации эквипотенциальных и силовых линий является специализированным цифровым вычислительным устройством. Нахождение эквипотенциальной линии сводится к определению наличия точки потенциала, равного заданному, между двумя узловыми точками сетки, в общем случае выбранными произвольно, и к нахождению координат эквипотенциальной точки. Устройство работает по принципу «опроса» всех элементов сетки по жесткой программе (метод «слежения» за эквипотенциальной линией требует наличия более громоздкой аппаратуры). Возможна реализация жесткой программы обхода области по координатным направлениям или диагоналям элементов (рис. 3). Вероятно, последнему способу следует отдать предпочтение, так как он имеет примерно на 40% меньше расстояния между линиями обхода по сравнению с методами координатного обхода, что, соответственно, дает большую частоту встречи линий обхода с эквипотенциальной линией. Обход производится по двум взаимно перпендикулярным направлениям во избежание потери эквипотенциальной линии, идущей параллельно линии обхода, по программе: $ab$, $cd$, $de$, $bf$ и т. д. Фиксация эквипотенциальной линии производится в два этапа. На первом этапе устанавливается наличие или отсутствие факта

пересечения эквипотенциальной линией линии обхода, во втором этапе вычисляются координаты точки пересечения и производится ее фиксация на графике [3]. На первом этапе устройством сравниваются коды потенциалов узловых точек (например $a$ и $b$) с кодом заданного потенциала $P$, для чего находятся разности $P - U_a$ и $P - U_b$ (или $P - U_c$, $P - U_d$ и т. д.).

При этом, если $P - U_a > 0$, $P - U_b > 0$, или, если $P - U_a < 0$ и $P - U_b < 0$, устройство выдает ноль, означающий отсутствие эквипотенциальной линии на участке между этими узловыми

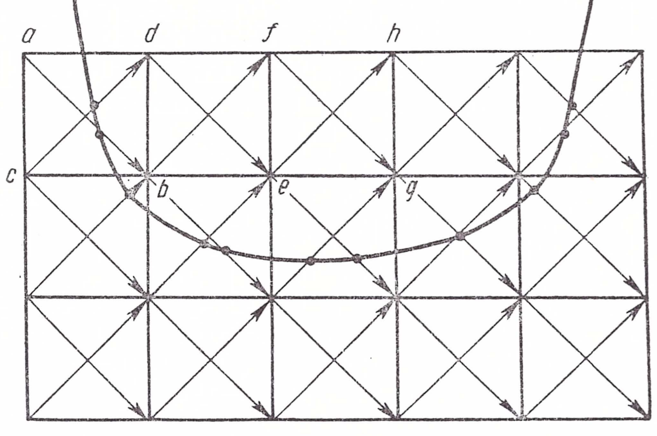


Рис. 3. Схема обхода области по диагоналям элементов.

точками сетки. Наоборот, если знаки разностей разные, устройство вырабатывает сигнал наличия эквипотенциальной линии, являющийся командой для вычисления дробной части кода координат (целая часть кода координат принадлежит кооринате узловой точки сетки). Вычисление дробной части соответствующей координаты производится по зависимости:

$$\Delta X = \alpha_x \frac{P - U_a}{U_b - U_a}; \quad \Delta Y = \alpha_y \frac{P - U_a}{U_b - U_a},$$

где $\alpha_x$ и $\alpha_y$ — координатные коэффициенты, учитывающие масштабы по координатной сетке.

После вычисления $\Delta X$ и $\Delta У$ на регистрирующее или печатающее устройства выдаются полные коды координат $X_i + \Delta X$ и $Y_i + \Delta Y$, по которым происходит фиксация точек эквипотенциальной линии на карте (с помощью двухкоординатного самописца типа ДРП) или числовыми таблицами с помощью печатающего устройства (рис. 4).

Нахождение линии тока основывается на допущении неразрывности силовой линии в пределах элемента сетки, однородности ве-

щества области в границах, эквивалентных элементу сетки, и отсутствию особых точек внутри этого элемента.

При этих допущениях можно считать, что проекция вектора тока на ось координат пропорциональна проекции градиента потенциала на ту же ось, т. е.

$$I_x = k_x \Delta U_x; \quad I_y = k_y \Delta U_y.$$

Поиск линии тока ведется из некоторой произвольно выбранной точки $X_0$, $Y_0$; по координатным составляющим градиентов потенци-

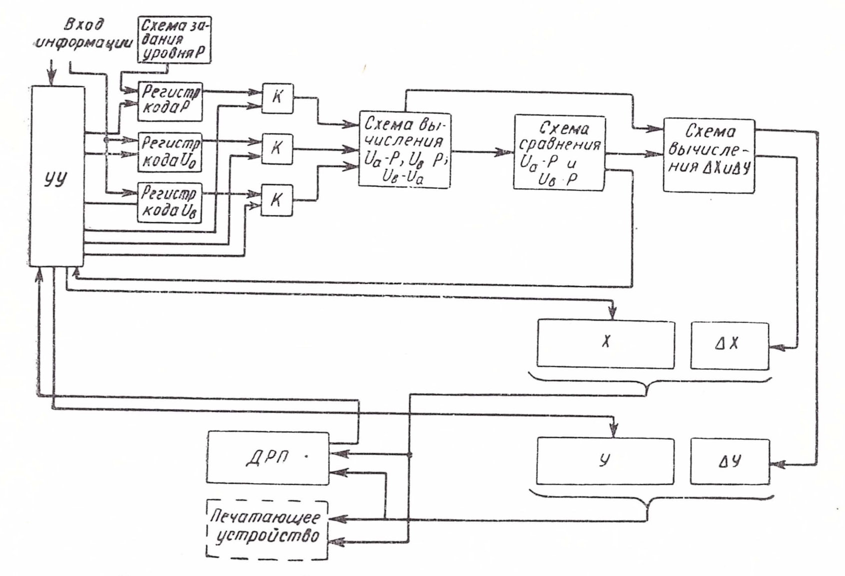



Рис. 4. Блок-схема устройства поиска и регистрации эквипотенциальных линий.

ала определяется направление вектора тока и в определенном масштабе находится модуль вектора

$$|I| = \sqrt{I_x^2 + I_y^2}.$$

На двухкоординатном регистрирующем устройстве типа ДРП делается отметка конца вектора, имеющего координаты $X_i + \Delta X_1$, $Y_j + \Delta Y_1$, после чего выдается сигнал на выполнение следующего шага и т. д. (рис. 5а). Отметки концов элементарных векторов в пределах одной клетки сетки делаются по одному направлению до тех пор, пока следующая точка ($X_0 + 5\Delta X_1 = X_1 + \Delta X_2$) не выйдет за пределы этой клетки. В этом случае реверсивный регистр $\Delta X$ (или $\Delta Y$) переполняется и выдает в реверсивный счетчик координат $X$ (или $Y$) единицу, которая прибавляется или вычитается к коду $X_0$ (или $Y_0$). Импульс переполнения любого из регистров является сигналом для смены кодов потенциалов узловых точек при переходе

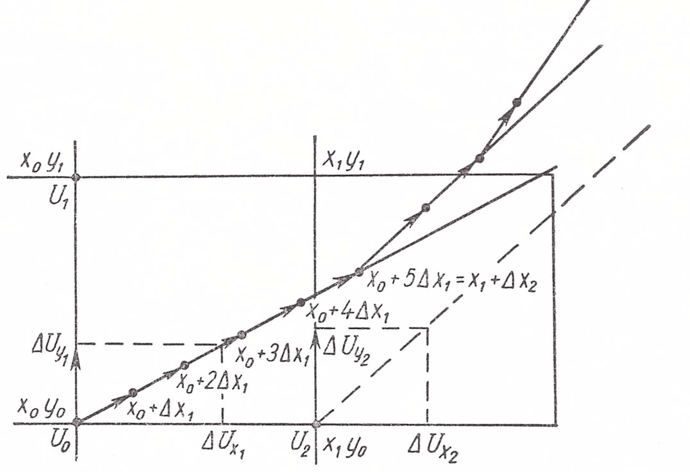



Рис. 5а. Схема аппроксимации силовой линии.

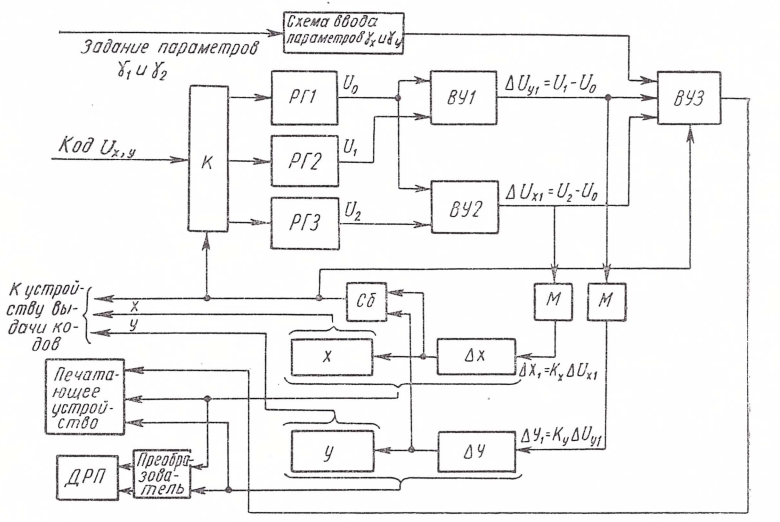



Рис. 5б. Блок-схема устройства поиска и регистрации силовых линий.

в соседнюю клетку и вычисления новых координатных составляющих градиента потенциала (рис. 5б).

Следующий элементарный вектор ищется по координатным проекциям градиента потенциала следующего элемента и т. д. Характерные точки линии тока, например, точки изломов аппроксимирующей ломаной при переходах в соседние элементы сетки, могут также печататься с помощью печатающего устройства. При этом печатаются координаты точки и значения модуля вектора тока,

выходящего из этой точки. Координаты точки излома выдаются координатными регистрами $X+\Delta X$ и $Y+\Delta Y$, а значения модуля вектора тока

$$|I| = \sqrt{\gamma_1^2 \Delta U_x^2 + \gamma_2^2 \Delta U_y^2}$$

вычисляются и выдаются специальным вычислительным блоком $ВУ_3$.

Таблица 2

| Комплект | Класс решаемых задач | Сокращенное наименование | Автоматизация |
|---|---|---|---|
| А | Уравнения эллиптического типа | БС-256 или БС-512 РИУ АИУ-3 | Автоматическое измерение решения |
| Б | Уравнения эллиптического типа | БС-1024 (БС-512) АИУ-3 ПЧУ БПИ РИУ | Автоматическое измерение и первичная обработка результатов решения |
| В | Уравнение эллиптического и параболического типа | (БС-8192) БС-1024 (БС-512) БЕ-256 БГУ-64 БГУ-64А АИУ-1 БНГУ-16 БПИ ИНСР РИУ ПЧУ | Автоматический ввод граничных условий, автоматическое измерение и первичная обработка результатов решения |
| Г | Нелинейные уравнения в частных производных второго порядка | БС-1024А БГУ-64А АПУ-2 БПИ ПЧУ (ЦВМ) | Автоматический ввод условия задачи, пересчет параметров, вывод результатов решения. Работа в составе аналого-цифрового вычислительного комплекса |
| Д | Уравнения параболического типа с условиями Стефана | БС-512 БЕ-256 БНПО-128 ПАУ-1 ПЧУ ИНСР БГУ-64 | Автоматический поиск движения границы фазового перехода |

Работа блока поиска эквипотенциальных и силовых линий возможна как непосредственно от сетки совместно с АИУ, так и от

оперативного накопителя, в котором хранятся коды потенциалов узловых точек сетки.

Перечисленные устройства позволяют производить комплектацию машин в соответствии с возможностями и спецификой конкретных потребителей. Ориентировочная комплектация машин приведена в табл. 2. Кроме указанных комплектов, очевидно, можно принять достаточно произвольно и любую другую комплектацию машин устройствами по номенклатуре и количеству.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гутенмахер Л. И. и др. Руководство к электроинтеграторам типа ЭИ-12. Изд-во АН СССР, М., 1965.

2. Николаев Н. С. и др. Аналоговая математическая машина УСМ-1 для решения краевых задач уравнений математической физики. Машгиз, М., 1962.

3. Козлов Э. С. и др. Устройство для решения дифференциальных уравнений с частными производными на сеточных электромоделях. Авторское свидетельство № 154094, 1963.

Доложено на семинаре
14 января 1966 г.

# ПРОГРАММИРУЮЩАЯ ПРОГРАММА ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ РАБОТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАШИНЫ НЕПРЕРЫВНОГО ДЕЙСТВИЯ С ПОМОЩЬЮ ЦВМ

А. Х. БЕРЕСЛАВСКИЙ, Г. С. ГОЛЬДЕНБЕРГ

Программирующая программа для моделирования работы ЭВМ непрерывного действия (ЭВМ НД) представляет собой программу для решения обыкновенных дифференциальных уравнений с произвольной правой частью (задача Коши).

Идея специализированной программирующей программы для решения дифференциальных уравнений встречается в литературе [1, 2] так же, как и идея использования ЦВМ для исследования цифровых моделей и ЦДА [3, 4].

При создании настоящей программы авторы руководствовались следующими положениями:

1) программа должна достаточно полно моделировать работу ЭВМ НД с учетом влияния основных помех и погрешностей;

2) программа должна быть простой в эксплуатации, т. е. характер работы с программой должен быть близок инженеру, производящему исследования с помощью ЭВМ НД.

Основной принцип работы программы заключается в моделировании решаемой задачи с помощью основных операций, реализуемых стандартными блоками (интеграторами, сумматорами, блоками произведения и деления, функциональными преобразователями и др.), подобно тому, как это осуществляется в ЭВМ НД.

Момент обращения к отдельным стандартным блокам, т. е. их «коммутация» устанавливается специальными кодами, вводимыми при заполнении исходных данных.

Моделирование случайных погрешностей выполняется блоком ДСЧ (датчик случайных чисел).

Количество «блоков», имеющихся в распоряжении исследователя, работающего с описанной программой, существенно зависит от емкости запоминающего устройства используемой ЦВМ. Применение внешних запоминающих устройств позволяет моделировать на ЦВМ работу всех ЭВМ НД, находящихся в эксплуатации.

При построении алгоритмов стандартных блоков, реализующих основные операции, были использованы уравнения, приведенные в статье [5].

Приступая к заполнению исходных данных, исследователь должен иметь подготовленную структурную схему задачи и список переменных, каждой из которых присвоен код (порядковый номер этой переменной в списке).

Массив исходных данных имеет две разновидности: массив, содержащий информацию о переменных (массив переменных) и массив, содержаший информацию о блоках (массив «блоков»).

В первый массив заносятся следующие величины:

1) число переменных;

2) число констант;

3) число печатающихся параметров;

4) переменные (переменные записываются строго в том же порядке, в котором они находятся в списке);

5) константы;

6) коды переменных, подлежащих печати.

Информация о втором массиве имеет следующий вид:

### А. Общая часть

1. Число блоков.
2. Количество интеграторов.
3. «Интервал печати» (под «интервалом печати» понимается отрезок времени, через который производится печать необходимых переменных).
4. Шаг интегрирования.
5. Интервал интегрирования.

### Б. Информация о «блоках» структурной схемы

1. Интегратор (интегро-сумматор) и сумматор:

а) код интегро-сумматора (сумматора);

б) число входных переменных;

в) код выходной переменной;

г) максимальная погрешность выходной переменной;

д) номер интегратора (в случае сумматор-нуль);

е) коды входных переменных;

ж) передаточные коэффициенты;

з) допуски по передаточным коэффициентам.

2. «Блок» произведения и «блок» деления:

а) код «блока»;

б) код выходной переменной;

в) максимальная погрешность выходной переменной;

г) коды входных переменных.

3. Функциональный преобразователь:

а) код «блока»;

б) код выходной переменной;

в) максимальная погрешность выходной переменной;
г) число узловых точек;
д) узловые абсциссы;
е) узловые ординаты.

Заполняя таким образом этот массив, исследователь производит «коммутацию» блоков, «набор» коэффициентов и функциональных зависимостей и другие операции, связанные с постановкой задачи на ЭВМ НД.

Кроме того, в этот массив исходных данных заносятся начальные условия и коды интеграторов, к которым они относятся, а также необходимое количество реализаций. Заполнение блоков происходит в произвольном порядке.

Программирующая программа состоит из двух частей: программы ввода переменных (ПВП) и программы решения задачи (ПРЗ). Для хранения переменных, получаемых в результате решения задачи в памяти машины выделяются два массива ячеек: основной и промежуточный. Входные переменные и передаточные коэффициенты перед работой того или иного блока пересылаются в стандартные рабочие массивы.

Работа программы строится по следующему принципу.

После ввода массива переменных ПВП осуществляет засылку начальных значений переменных и контакт в основной массив, а также пересылает в специальный массив коды переменных, подлежащих печати. Затем вводится массив блоков и управление передается на ПРЗ.

ПРЗ осуществляет решение задачи. Решение начинается с внесения погрешностей от ДСЧ, определяемых допусками, в передаточные коэффициенты.

Погрешность определяется следующим образом. ДСЧ вырабатывает случайное число в заданном интервале. Погрешность, вносимая в коэффициент, определяется по формуле

$$\Delta x = 2m\Delta x_{\text{макс}} - \Delta x_{\text{макс}}, \qquad (1)$$

где $\Delta x$ — случайная погрешность; $\Delta x_{\text{макс}}$ — максимально допустимая погрешность.

Как видно из работы [1]

$$-\Delta x_{\text{макс}} \leqslant \Delta x \leqslant \Delta x_{\text{макс}}.$$

Далее производится расчет выходных величин «блоков» в порядке их заполнения в массиве «блоков» (просчет «циклов»).

После пересылки передаточных коэффициентов и входных переменных очередного блока в стандартные рабочие массивы, машина по коду блока выходит на расчет его выходной величины по соответствующему алгоритму.

Выходные величины интеграторов хранятся в основном и промежуточном массивах, выходные величины остальных «блоков» — только в основном.

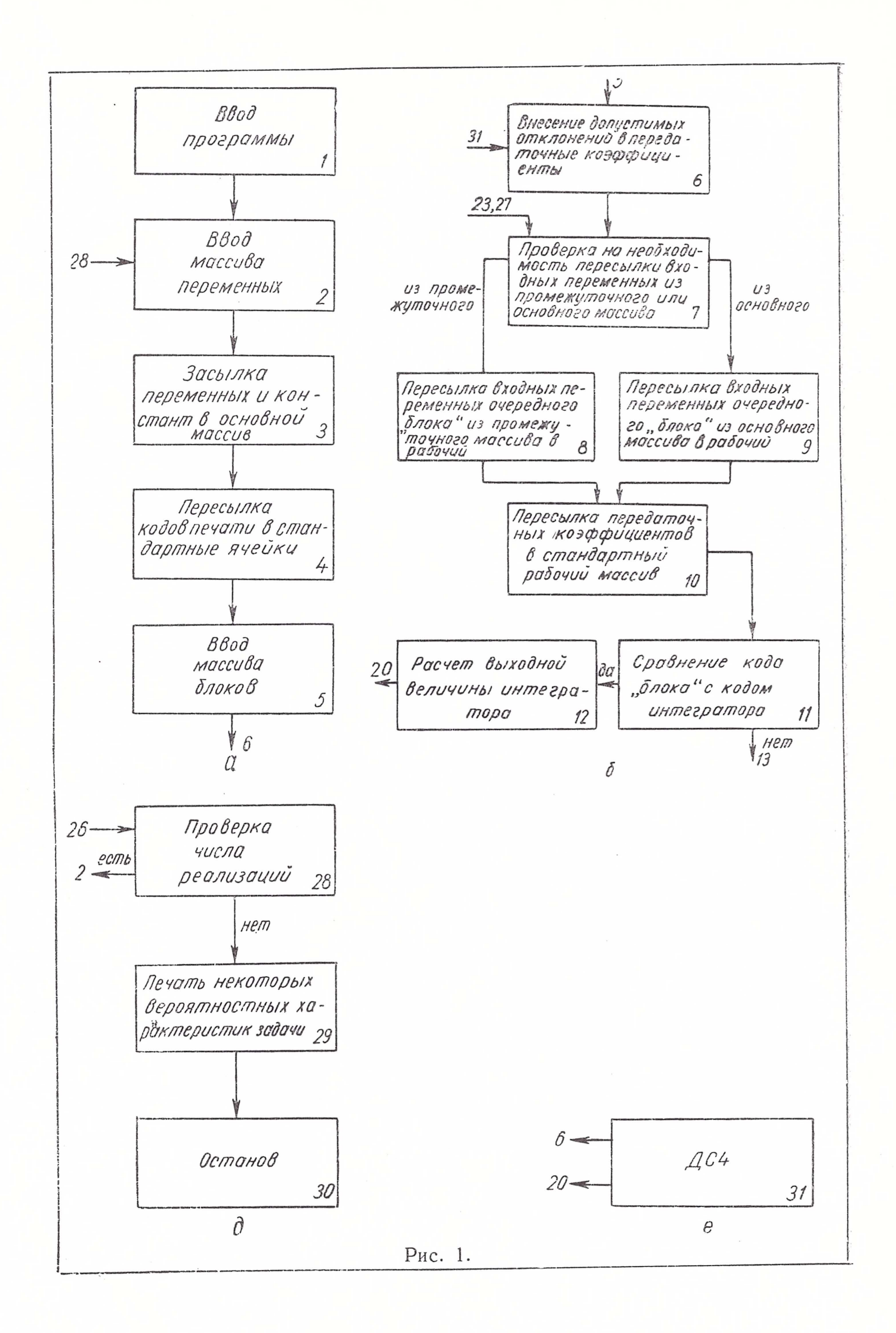
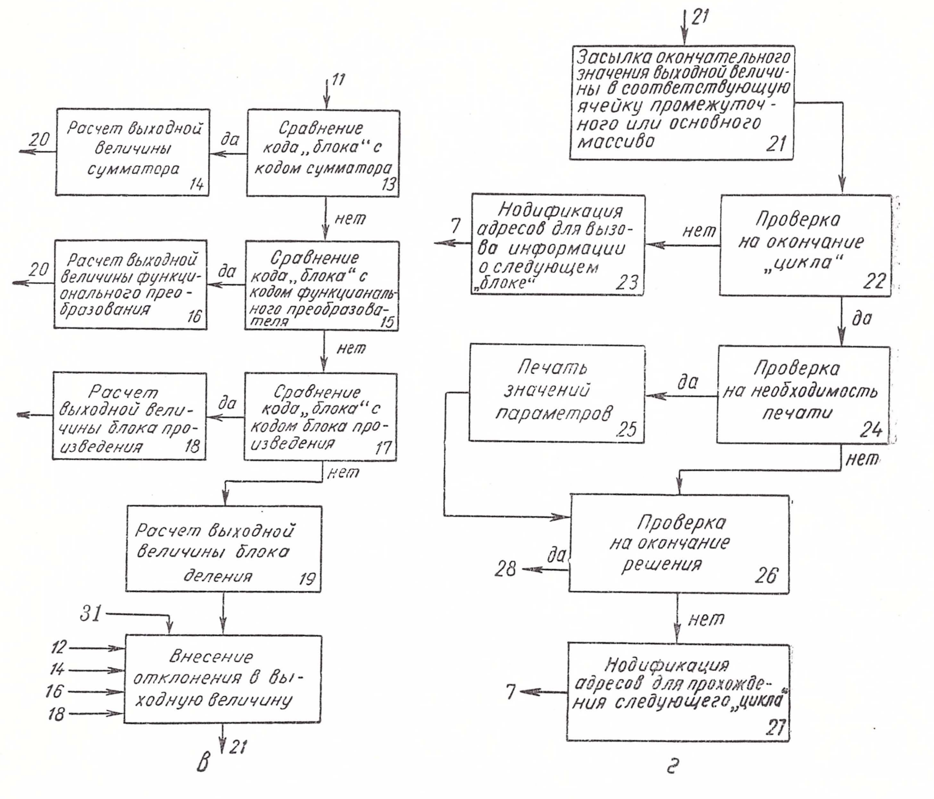

Ввод программы 1
Ввод массива переменных 2
28
Засылка переменных и констант в основной массив 3
Пересылка кодов печати в стандартные ячейки 4
Ввод массива блоков 5
6
а
Внесение допустимых отклонений в передаточные коэффициенты 6
31
23,27
Проверка на необходимость пересылки входных переменных из промежуточного или основного массива 7
из промежуточного
из основного
Пересылка входных переменных очередного „блока" из промежуточного массива в рабочий 8
Пересылка входных переменных очередного „блока" из основного массива в рабочий 9
Пересылка передаточных коэффициентов в стандартный рабочий массив 10
Расчет выходной величины интегратора 12
20
да
Сравнение кода „блока" с кодом интегратора 11
нет
13
б
26
есть
2
Проверка числа реализаций 28
нет
Печать некоторых вероятностных характеристик задачи 29
Останов 30
д
ДС4 31
6
20
е

Рис. 1.




Если входные переменные рассчитываемого «блока» не являются выходами интеграторов, то в стандартный рабочий массив пересылаются их значения, взятые из основного массива.

В противном случае определяется, были ли данные выходы интеграторов просчитаны в данном цикле или нет.

В первом случае в рабочий массив посылаются выходы интеграторов из промежуточного массива, во втором — из основного.

После расчета значения выходной переменной в нее вносится погрешность от ДСЧ, ограниченная максимальным значением погрешности.

Окончательное значение выходной переменной интегратора посылается на свое место в промежуточном массиве, значение выходной величины любого другого «блока»— в основном массиве.

После просчета всех блоков (прохождения «цикла») содержимое промежуточного массива пересылается в основной массив.

Такая схема позволяет осуществить процесс интегрирования по методу Эйлера, т. е. по формуле

$$x^i_{k+1} = x^i_k + hf^i_k(t, x^1, \dots, x^n),$$

где $i$ — номер переменной; $k$ — номер шага интегрирования при произвольном расположении «блоков» в массиве «блоков», что представляет значительные удобства при работе с большими структурными схемами.

При необходимости продолжать решение рассчитывается следующий «цикл» и т. д.

Нужные переменные выводятся на печать. Печать происходит с промежутками, равными «интервалу печати».

Решение прекращается после того, как переменные будут определены на всем интервале интегрирования.

Далее определяется необходимость следующей реализации и рассчитываются вероятностные характеристики задачи:

$$x^j_{\text{макс}},\ x^j_{\text{мин}}$$

$$x^j_{\text{ср}} = \frac{x^{j-1}_{\text{ср}}(j-1) + x^j}{j},$$

$j$ — номер реализации решения.

Блок-схема программы приведена на рисунке, *а—е*.

Описанная программа производит программирование задач, решаемых на ЭВМ НД, с одновременным моделированием работы исследуемой ЭВМ НД, т. е. работает как программирующая программа, входным языком которой служит структурная схема задачи, а результатом работы — цифровая модель ЭВМ НД.

Необходимо отметить, что программа решения данной задачи составляется и сохраняется в памяти машины по частям, обеспечивающим работу соответствующих блоков. Эта особенность программы значительно экономит память машины, что позволяет сохранять в памяти программирующую программу и оперативно производить исследование последовательности задач различных классов.

Программа была проверена группой задач различной сложности, после чего применялась для исследования некоторых специализированных ЭВМ НД.

Некоторые результаты исследований приведены в работе [5].

## ЛИТЕРАТУРА


1. Глушков В. М.— Проблемы кибернетики, 1959, 2, 181.
2. Стогний А. А.— Проблемы кибернетики, 1959, 2, 185.
3. Смолов В. Б. и др. Вычислительные машины непрерывного действия. «Высшая школа», М., 1964.
4. Неслуховский К. С. Цифровые дифференциальные анализаторы. Физматгиз, М., 1963.
5. Береславский А. Х., Гольденберг Г. С.— Настоящий сборник, 305.



Доложено на семинаре
24 декабря 1965 г.

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ЭВМ НЕПРЕРЫВНОГО ДЕЙСТВИЯ С ПОМОЩЬЮ ЦВМ

А. Х. БЕРЕСЛАВСКИЙ, Г. С. ГОЛЬДЕНБЕРГ

Работа ЭВМ непрерывного действия (ЭВМ НД) состоит в преобразовании информации при наличии помех. Эффективное решение вопросов, связанных с исследованием работы ЭВМ НД, возможно на основе общей теории связи (теории информации). Однако, несмотря на то, что информационные методы универсальны, а зачастую и единственны, применение их для оценки и проектирования (анализа и синтеза) ЭВМ НД затруднено. Это в значительной мере объясняется отсутствием доступных методов расчета для реализации математического описания чрезвычайно сложных и разнообразных физических процессов, происходящих в ЭВМ НД.

В статье рассмотрены принципы построения статистического моделирующего алгоритма ЭВМ НД, позволяющего рассмотреть наиболее важные вопросы анализа и синтеза ЭВМ НД. Особое внимание уделено возможности реализовать рассматриваемый метод на ЦВМ.

1. При проектировании специализированных ЭВМ НД и подготовке к набору на универсальных ЭВМ НД большое внимание уделяется точности их работы. В работах [1, 2] разработаны методы анализа ошибок в схемах моделей для решения обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Однако эти методы сложны и применимы лишь в простых случаях.

В то же время знание количественных и качественных характеристик вычислительных комплексов, состоящих из новых или известных блоков, весьма необходимо.

Действительно, перед решением задачи на ЭВМ НД, она должна быть соответствующим образом «запрограммирована», т. е. сложный оператор решения задачи заменяется комбинацией операций, возможных на имеющейся ЭВМ НД. Учитывая возможность ряда таких комбинаций, ставится задача выбора более эффективной комбинации.

Рассмотрим подробнее процесс получения решения задач с помощью ЭВМ НД.

Пусть заданная для исследования система имеет вид

$$x_j = F(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n, t), \tag{1}$$

где $j \neq i$ и $x_i$ — физические переменные.

Для реализации на ЭВМ НД исходная система уравнений (1) при помощи дополнительно вводимых уравнений преобразования (в общем случае нелинейных) приводится к форме, удобной для набора на ЭВМ НД

$$X_j = \Phi(X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots, X_n, T), \tag{2}$$

где $j \neq i$ и $X_i$ — машинные переменные (аналоги физических переменных уравнения (1)).

Каждая операция в уравнениях (2) выполняется при помощи схемы, характеристика которой отличается от аппроксимируемого ею процесса. В результате ЭВМ НД дает решение отличной от (2) системы уравнений:

$$X_j^* = \Phi^*(X_1^*, X_2^*, \ldots, X_i^*, \ldots, X_n^*, \ldots, T^*), \tag{3}$$

где $j \neq i$ и $X_i^* = X_i + \Delta X_i$; $\Delta X_i$ — абсолютная погрешность в переменной $X_i$. Переходя при помощи обратных уравнений преобразования к физическим переменным, получим решение, соответствующее следующей системе уравнений:

$$\overset{*}{x}_j = F^*(\overset{*}{x}_1, \overset{*}{x}_2, \ldots, \overset{*}{x}_i, \ldots, \overset{*}{x}_n, t^*). \tag{4}$$

Степень тождественности систем (1) и (4) зависит от их специфики, используемых блоков, условий работы, уравнений преобразования и др.

Изложенный в работе [11] способ выбора уравнений преобразования основывался на предположении об ограниченных значениях $\Delta X_i$ и приблизительном соответствии динамических и статических погрешностей решения.

Для восполнения этого пробела и решения ряда других важных вопросов, возникающих при проектировании ЭВМ НД, весьма полезным оказался метод статистического моделирования. Сущность этого метода в нашем случае состоит в построении для исследуемой ЭВМ НД соответствующего алгоритма, иммитирующего при помощи операций ЦВМ характеристики элементов ЭВМ НД и взаимодействие между ними с учетом неидеальности этих характеристик и случайных возмущающих факторов.

2. Процесс решения задач на ЭВМ НД представляет собой передачу и преобразование информации, сопровождающиеся ее искажениями.

Помехи, сопутствующие циркуляции информации, можно отнести к следующим трем группам:

1) случайные помехи ($\Delta X_c$): низкочастотные помехи, вызванные дрейфом нуля операционных усилителей из-за изменения напряже-

ния питания и старения элементов, неидеальными характеристиками входных цепей и цепей обратной связи, и более широкополосные помехи, вызванные фоном и генерацией паразитных контуров;

2) помехи, вызванные конечностью величины коэффициента усиления операционного усилителя ($\Delta X_у$);

3) помехи, вызванные неидеальностью частотных характеристик операционного усилителя ($\Delta X_ч$).

В результате общая погрешность какого-либо блока имеет вид

$$\Delta X = \Delta X_с + \Delta X_у + \Delta X_ч.$$

При этом все случайные процессы, происходящие в самом блоке и на его входах, заменены эквивалентным случайным сигналом, действующим на выходе блока ($\Delta X_с$).

Практика показала, что для моделирования $\Delta X_с$, достаточно полно отражающего роль низко- и высокочастотных составляющих спектра помех, необходимо генерировать случайные сигналы $\Delta X_с$ в ограниченном частотнсм интервале (0; 0,5 *кгц*) при законе равномерной плотности распределения.

3. Так как ЦВМ устанавливает зависимость между функциями, определенными на дискретном множестве точек независимой переменной, разделенных конечными интервалами, то при моделировании ЭВМ НД на ЦВМ предусматривается замена исходных функций непрерывного аргумента соответствующими им решетчатыми [6]

$$x_д = \sum_{0}^{\infty} x(nh) \cdot \delta(t - nh), \tag{5}$$

где $\delta(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{при } \tau = 0, \\ 0 & \text{при } \tau \neq 0. \end{cases}$

Среди множества непрерывных функций взаимно однозначное соответствие с данной решетчатой функцией имеет только функция Котельникова. Все остальные функции будут содержать избыток или недостаток информации. Как известно [5] функция Котельникова всегда имеет ограниченный спектр. Отсюда можно сделать вывод, имеющий существенное значение: на ЦВМ можно моделировать функции только с ограниченным спектром, причем величина этого спектра определяется величиной интервала между точками разбиения оси аргумента.

Таким образом, ограниченность полосы пропускания операционных усилителей ЭВМ НД можно моделировать на ЦВМ выбором соответствующего шага численного интегрирования.

Теорема В. А. Котельникова позволяет установить зависимость между величиной интервала дискретных отсчетов изменения аргумента и шириной частотного спектра блоков ЭВМ НД. Шаг интегрирования

$$h \leqslant \frac{1}{2f_в}, \tag{6}$$

где $f_в$ — граничная частота непрерывного сигнала. Если $h = \frac{1}{2f_в}$, то интервал дискретности максимальный и преобразование непрерывной функции с ограниченным спектром происходит без потери информации. Очевидно, частотная характеристика цифровой модели блока ЭВМ НД должна приближаться к реальной. Это можно реализовать выбором соответствующей квадратурной формулы.

Решение дифференциальных уравнений при помощи квадратурных формул сопровождается погрешностью. Составные части погрешности — погрешность аппроксимации и погрешность округления, которая получается из-за того, что вычисления производятся над числами с ограниченным числом разрядов. Точности и устойчивости квадратурных формул наиболее полно исследованы в работе [10].

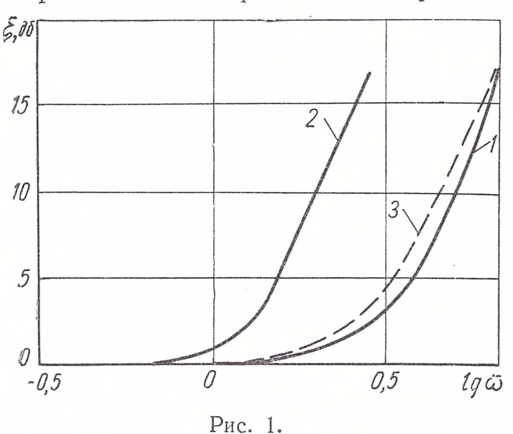


Рис. 1.

Кривые функции $\xi = \zeta\left(\frac{f}{f_в}\right)$ для блоков ЭВМ НД и некоторых квадратурных формул показаны на рис. 1.

Приведенные кривые определяют возможности каждой квадратурной формулы в смысле получаемого соответствия в точности и полосе пропускаемых частот блокам ЭВМ НД. Очевидно, что критерий для определения максимально допустимых $h$, обеспечивающих заданную устойчивость и точность для всех переменных, основывается на априорном знании или теоретическом расчете собственных частот моделируемой статистически ЭВМ НД при всех ее возможных состояниях.

Покажем связь между процессом интегрирования в ЭВМ НД и квадратурной формулой Эйлера 1. Интегратор ЭВМ НД выполняет решение дифференциального уравнения первого порядка

$$\dot{x} = f(x, t). \qquad (7)$$

Уравнение (7) можно представить в виде

$$\frac{x(n+1) - x(n)}{T} = f[x(n), t_n],$$

откуда легко образовать рекуррентное выражение, используемое при выполнении $n + 1$-го шага численного интегрирования по методу Эйлера 1

$$x(n+1) = x(n) + Tf[x(n), t_n].$$

При построении алгоритмов отдельных блоков ЭВМ НД используем соотношение

$$X_j = \frac{1}{pT+1} \cdot \sum_{1}^{r} \Phi(X_i), \tag{8}$$

где $\Phi(X_i)$ — функциональный оператор преобразования и $i \neq j$. Для интегратора, сумматора и инвертора

$$\Phi(X_i) = Z_{\text{о.с}} \sum_{1}^{r} \frac{X_i}{Z_i},$$

для функционального преобразователя

$$\Phi(X_i) = X_i(0) + \sum_{1}^{r} k_i \operatorname{sign}[X_i(0) - X_i(\tau)],$$

где $T$ — постоянная времени операционного блока (кроме интегратора):

$$T \approx \frac{1}{2f_{\text{в}}} \ll 1.$$

Для интегратора

$$T \gtrless 1.$$

Необходимо отметить, что образующийся в ЦВМ алгоритм задачи вне зависимости от способа его получения представляет систему рекуррентных формул, как и в ЭВМ НД. Особенность цифровых моделей в том, что если не считать погрешности округления, которые можно сделать достаточно малыми, разностное уравнение, описывающее работу модели, решается точно, т. е. без погрешностей, вносимых устройствами. Это обстоятельство позволяет программным способом моделировать особенности работы ЭВМ НД.

4. Схема, состоящая из узлов, погрешности которых случайны, не может иметь определенной погрешности и постановка такого вопроса с вероятностной точки зрения является необоснованной, но зато корректна задача определения вероятностной погрешности. Возникает вопрос об оценке вероятности принятого значения погрешности решения. Поставленная задача может быть решена при применении интегральной теоремы Муавра-Лапласса.

Исходя из опыта и экономико-технических соображений, выбираем коэффициент доверия $v$. Тогда

$$P\left\{\frac{M}{N}\right\} < P - K\sqrt{\frac{P(1-P)}{N}}, \tag{9}$$

где $N$ — число реализаций;

$$P = \frac{M}{N};$$

$$K = F^{-1}(v); \quad F(v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{k} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Обозначив

$$F^{-1}(v)\sqrt{\frac{P(1-P)}{N}} = \varepsilon,$$

получим

$$N \geqslant \frac{P(1-P)}{\varepsilon^2}\{F^{-1}(v)\}^2. \qquad (10)$$

Таким образом, зафиксировав коэффициент доверия $v$ и доверительный интервал $(P - \varepsilon,\ 0)$, за пределы которого $P = \frac{M}{N}$ не выходит, можно рассчитать необходимое число реализаций.

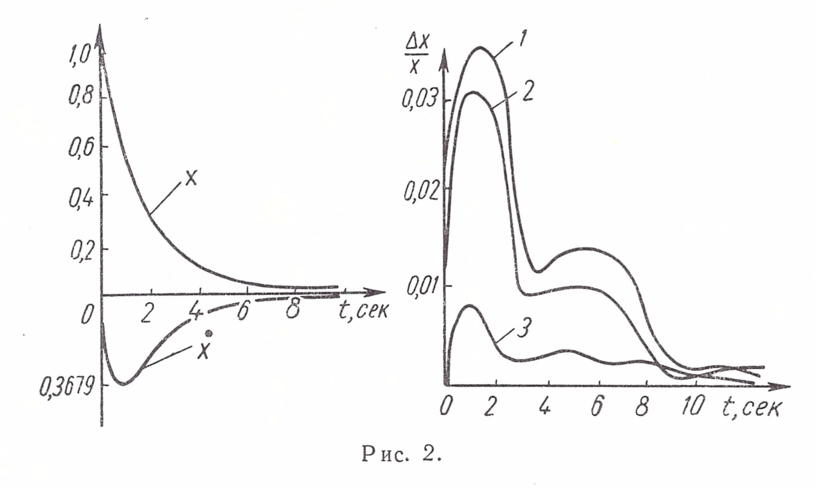



Рис. 2.

Пример. Пусть дано $v = 0{,}95$, $P = 0{,}5$, $K = 1{,}65$. Тогда $\varepsilon = 0{,}05$ и $N = 270$.

По результатам $N$ реализаций нетрудно установить (на ЦВМ) следующие вероятностные характеристики:

а) математическое ожидание параметров;

б) максимальные достоверные отклонения от точного решения;

в) среднеквадратичную погрешность и др.

5. Подведем некоторые итоги. Статистическое моделирование ЭВМ НД начинается с формализации процесса и построения системы соотношений, описывающих работу блоков ЭВМ НД и взаимодействие между ними с учетом основных помех. ЦВМ, выполняя этот алгоритм, выдает информацию о состоянии процесса и влияния на него отдельных факторов так же, как и при натуральном эксперименте. Результаты каждой отдельной реализации процесса на ЦВМ отражают суммарный эффект совокупного действия учтенных помех во всех блоках. Поэтому они носят случайный характер и не могут служить объективной оценкой характеристик ЭВМ НД.

Для такой оценки необходимо рассмотреть определенное число реализаций.

Метод статистического моделирования позволяет получать конкретные рекомендации по составу и схеме набора ЭВМ НД, применению элементов с рационально выбранной точностью работы и полосой пропускания.

Получение оптимальных в статистическом смысле результирующих характеристик ЭВМ НД может быть достигнуто при неоптимальных элементах.

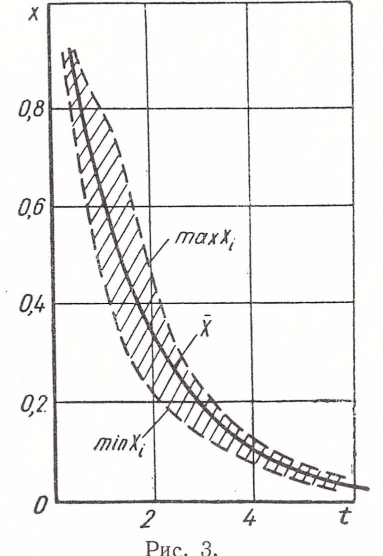


Рис. 3.

Для решения задач синтеза необходимо установить критерии и характеристики ЭВМ НД, которые должны быть достигнуты. Каждая из характеристик (точность, надежность и т. д.) могут быть однозначно в вероятностном смысле определены характеристиками отдельных элементов и структурой ЭВМ НД. Такой подход к проблеме синтеза ЭВМ НД является достаточно общим и наиболее реальным в смысле оценок получаемых результатов.

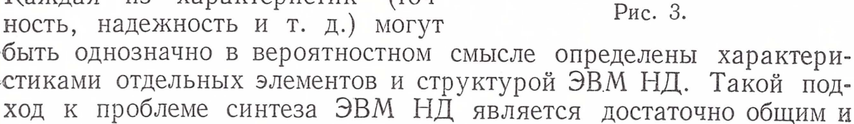


Рис. 4.

На рис. 2—4 приведены структурные схемы ЭВМ НД и результаты исследования их методом статистического моделирования.

ЛИТЕРАТУРА


1. Коган Б. Я. Электронные моделирующие устройства и их применение для исследования систем автоматического регулирования. Физматгиз, М., 1963.

2. Doy P. C. An analysis of certain errors in electronic differential analyzers IRE, EC — 6, N 4, 255.

3. Казаков И. Е., Доступов Б. Г. Статистическая динамика нелинейных автоматических систем, 1962.

4. Бусленко Н. П. и др. Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло). 1962.

5. Харкевич. Спектры и анализ. 3-е изд., 1957.
6. Башарин Г. П., Швальб В. П.— Энергетика и автоматика, 1962, 3.
7. Цыпкин Я. З. Теория импульсных систем. Физматгиз, М., 1958.
8. Анисимов Б. В., Виноградов Ю. В.— Вычислительная техника, 1953, 2.
9. Шилейко А. В. Цифровые модели. «Энергия», М., 1964.
10. Шура-Бура М. Р.— Прикладная математика и механика, 1952, 16, 5.
11. Береславский А. Х. и др.— В кн.: Математическое моделирование и электрические цепи. Вып. IV. «Наукова думка». К., 1966.

Доложено на семинаре
24 декабря 1965 г.

# НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ ОБРАТНЫХ И ОБРАТИМЫХ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ

Ю. М. ГОРСКИЙ, В. В. НОВОРУССКИЙ

Методы переработки информации, повышающие содержательность информации, назовем прямыми. Для таких методов характерно, что поток информации распространяется от входа к выходу и в результате на основе частных информационных параметров формируются общие суждения.

Обратными методами назовем такие, когда в процессе переработки содержательность информации снижается, т. е. когда на основе общих суждений определяются частные информационные параметры (поток информации от выхода к входу). Соответственно с этими определениями все элементы и устройства, перерабатывающие информацию, можно в информационном отношении разделить на прямые, обратные и обратимые. К последним относятся те, что позволяют осуществлять как прямую, так и обратную переработку информации. В настоящее время уже созданы непрерывные вычислительные элементы, обладающие свойствами обратимости [1]. Возможность построения на этих элементах непрерывных обратных моделей объекта позволяет синтезировать непрерывные оптимальные системы управления [2].

В настоящей работе делается попытка распространить принципы обратимости на некоторые классы конечных автоматов.

Рассмотрим конечный автомат Мили. Как известно, его работа описывается однозначными операторами $f$ и $\varphi$, заданными на множестве возможных входных сигналов $X = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, множестве возможных выходных сигналов $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_k)$ и множестве возможных внутренних состояний $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. В дальнейшем операторы $f$ и $\varphi$, определяющие функции переходов $a(t+1) = f[a(t); x(t)]$ и выходов $y(t) = \varphi[a(t); x(t)]$ конечного автомата Мили назовем прямыми, а об автомате, реализующем указанные функции, будем говорить, что он функционирует в прямом направлении.

Для решения задачи обратной переработки информации необходимо на основе известных функций $a(t+1)$ и $y(t)$ определить об-

ратные операторы $f^{-1}$ и $\varphi^{-1}$, чтобы синтезировать конечный автомат, функционирующий в обратном направлении.

Значения функции, описываемой обратным оператором, могут содержать только однобуквенные слова, либо быть представлены в виде последовательностей букв. Тогда конечные автоматы, функционирующие в соответствии с обратной функцией, множество возможных значений которой ограничено подмножеством однобуквенных и пустых слов, будем называть одношаговыми. Подмножеству возможных значений функции, реализуемой такими автоматами, которые можно выразить в виде последовательностей букв, будут ставиться в соответствии пустые слова.

Конечные автоматы, функционирующие в соответствии с обратной функцией, множество возможных значений которой не ограничивается и может выражаться последовательностями букв, будем называть многошаговыми. Одношаговые обратные конечные автоматы являются, таким образом, частным случаем многошаговых.

В зависимости от типа обратных операторов, с помощью которых описывается обратный конечный автомат, можно выделить два класса (I, II) обратных конечных автоматов.

К обратимым конечным автоматам следует отнести такие конечные автоматы, которые описываются прямыми операторами $f$ и $\varphi$ в интервалы времени $t_{пфi} \in T_{пф}$ и обратными операторами $f^{-1}$ и $\varphi^{-1}$ в интервалы времени $t_{офi} \in T_{оф}$. При этом на множества $T_{пф}$ и $T_{оф}$, определяемых сигналами управления $H$, накладывается условие $T_{пф} \bigcup T_{оф} / T_{пф} \bigcap T_{оф}$. Сигналы управления переключают автомат с работы в прямом направлении на работу в обратном и наоборот, т. е. $T_{пф} = \omega_1(H)$ и $T_{оф} = \omega_2(H)$.

### Одношаговые обратные конечные автоматы классов I и II

Обратный конечный автомат класса I позволяет на основе предыдущего и последующего состояний автомата или на основе настоящего состояния и выходного сигнала определить сигнал, действующий на его входе. Работа такого автомата может быть охарактеризована так называемыми обратными функциями входов вида

$$x(t) = f^{-1}[a(t); \quad a(t+1)],$$

$$x(t) = \varphi^{-1}[a(t); \quad y(t)],$$

или $x(t) = F^{-1}[a(t); a(t+1); y(t)]$, которые определяются на основе прямых операторов $f$ и $\varphi$ исходного автомата. Пусть операторы, описывающие работу исходного прямого автомата, заданы совмещенной таблицей переходов и выходов в $m$ строк по количеству букв входного алфавита и в $n$ столбцов по количеству возможных внутренних состояний. Поскольку для обратных методов переработки информации в общем случае характерно снижение содержательности информации, то обратные операторы $f^{-1}$, $\varphi^{-1}$ и $F^{-1}$, описы-

вающие работу обратных конечных автоматов, в общем случае не могут быть однозначными, за исключением следующих частных случаев.

1. Обратный оператор $f^{-1}$, характеризующий работу обратного конечного автомата, может быть однозначным в том только случае, если число элементов множества $A_i(t+1) = \Gamma[a_i(t) \times X]$ равно $m$ для всех столбцов $i = 1, 2, \ldots, n$. Здесь $a_i(t)$ — внутреннее состояние исходного прямого автомата, определяющее $i$-ый столбец его совмещенной таблицы переходов и выходов, $X$ — множество входных сигналов $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, представленных строками этой же таблицы. $A(t+1)$ — множество внутренних состояний прямого автомата в момент времени $(t+1)$, являющееся отображением множества пар, образованных внутренним состоянием автомата в момент времени $t$ и входным сигналом (элементы этого множества $a(t+1) \in \in A(t+1)$ заполняют внутреннюю часть таблицы переходов прямого автомата). Обратный автомат, определяемый однозначным оператором $f^{-1}$, можно назвать детерминированным по состояниям, так как элементы множества $X$ однозначно определяются элементами множества $A(t+1)$ для данного $a(t)$.

2. Обратный оператор $\varphi^{-1}$, характеризующий работу обратного конечного автомата, может быть однозначным в том только случае, если число элементов множества $Y_i(t) = \Gamma[a_i(t) \times X]$ равно $m$ для $i = 1, 2, \ldots, n$. Здесь $Y_i(t)$ — подмножество множества выходных сигналов исходного прямого автомата $Y(y_1, y_2, \ldots, y_k)$ для $i$-го столбца таблицы выходов. Обратный автомат, определяемый однозначным оператором $\varphi^{-1}$, можно назвать детерминированным по выходам, поскольку элементы множества $X$ однозначно определяются элементами множества $Y(t)$ для данного внутреннего состояния $a(t)$.

3. Обратный оператор $F^{-1}$, характеризующий работу обратного конечного автомата, может быть однозначным в том только случае, если число элементов множества $(A, Y)_i = \Gamma[a_i(t) \times X]$ равно $m$ для $i = 1, 2, \ldots, n$. Здесь $(A, Y)_i$ — подмножество множества пар, образованных состоянием автомата $a(t+1)$ и выходным сигналом $y(t)$ для $i$-го столбца совмещенной таблицы переходов и выходов. В этом случае можно говорить о совмещенном операторе $F^{-1}(f^{-1}, \varphi^{-1})$, характеризующем однозначно работу обратного автомата, детерминированного по выходам или состояниям.

Таким образом, обратный конечный автомат класса I является детерминированным в тех случаях, когда исходный прямой автомат из каждого из $n$ внутренних состояний под действием $m$ возможных входных сигналов: 1) переходит в $m$ различных внутренних состояний; 2) выдает $m$ различных выходных сигналов; 3) имеет $m$ различных сочетаний внутренних состояний $a(t+1)$ и выходных сигналов. Во всех остальных случаях в определении входного сигнала возникает неопределенность, которая может быть раскрыта лишь при использовании вероятностных соотношений, позволяющих выбрать одно из возможных значений $x(t)$.

Определим правило нахождения обратных операторов $f^{-1}$ и $\varphi^{-1}$ по заданным прямым операторам $f$ и $\varphi$, пользуясь табличным способом задания определяемых ими функций.

Для того чтобы найти обратную функцию входов $x(t) = \varphi^{-1}[a(t), y(t)]$, необходимо в строках таблицы выходов $y(t) = \varphi[x(t); a(t)]$ символы входного алфавита $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ заменить символами выходного алфавита $(y_1, y_2, \ldots, y_k)$, а клетки таблицы заполнить символами входного алфавита таким образом, чтобы на пересечении $a_i$ столбца и $y_i$ строки было бы значение $x_q$, найденное из таблицы выходов прямого автомата, как условие получения $y_j$ при переходе из состояния $a_i$.

При этом, если для столбца $a_i$ таблицы выходов невозможно получить значение $y_j$ ни при каком значении $x$, то на месте пересечения столбца $a_i$ со строкой $y_i$ обратной функции следует вписывать пустое слово $e$. Если же в прямом автомате для столбца $a_i$ можно получить значение $y_j$ для нескольких значений $x$, то в таблице обратной функции на месте пересечения столбца $a_i$ со строкой $y_j$ записываются значения этих $x$ с указанием значений вероятности появления каждого из них при состоянии $a_i$.

Для того чтобы найти обратную функцию входов $x(t) = f^{-1}[a(t); a(t+1)]$, необходимо в строках таблицы переходов $a(t+1) = f[a(t); x(t)]$ символы входного алфавита $(x_1; x_2, \ldots, x_m)$ заменить символами алфавита внутренних состояний $a_1(t+1)$; $a_2(t+1); \ldots; a_n(t+1)$, а клетки таблицы заполнить символами входного алфавита, принимая во внимание соображения, изложенные для предыдущей таблицы, с той лишь разницей, что переменные $a(t+1)$ и $y(t)$ здесь меняются ролями.

Мы рассмотрели пример построения таблиц обратных функций входов для автомата Мили, заданного таблицей функционирования (табл. 1) прямого автомата (а) и обратного (б, в) автомата класса I.

Таблица 1

а) $a(t+1) = f[a(t); x(t)]$; $y(t) = \varphi[a(t); x(t)]$

| $x(t)$ \ $a(t)$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $a_2$ $y_2$ | $a_2$ $y_3$ | $a_4$ $y_1$ | $a_3$ $y_3$ |
| $x_2$ | $a_3$ $y_2$ | $a_1$ $y_1$ | $a_1$ $y_3$ | $a_3$ $y_3$ |
| $x_3$ | $a_4$ $y_1$ | $a_1$ $y_2$ | $a_2$ $y_2$ | $a_4$ $y_1$ |

б) $x(t) = \varphi^{-1}[y(t);\ a(t)]$

| $x(t)$ \ $a(t)$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | $x_3$ | $x_2$ | $x_1$ | $x_3$ |
| $y_2$ | $x_1(P_2)$ $x_2(1-P_2)$ | $x_3$ | $x_3$ | $e$ |
| $y_3$ | $e$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_1(P_1)$ $x_2(1-P_1)$ |

в) $x(t) = f^{-1}[a(t+1);\ a(t)]$

| $a(t+1)$ \ $a(t)$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | $e$ | $x_2(P_3)$ $x_3(1-P_3)$ | $x_2$ | $e$ |
| $a_2$ | $x_1$ | $x_1$ | $x_3$ | $e$ |
| $a_3$ | $x_2$ | $e$ | $e$ | $x_1(P_4)$ $x_2(1-P_4)$ |
| $a_4$ | $x_3$ | $e$ | $x_1$ | $x_3$ |

В регулярной форме с помощью совмещенного оператора $F^{-1}$ алгоритм работы обратного автомата для данного примера можно представить так:

$$S_1^{-1} = [a_1(t) \wedge a_2(t+1)] \vee [a_2(t) \wedge a_2(t+1)] \vee [a_3(t) \wedge a_4(t+1)] \vee \vee [a_4(t) \wedge a_3(t+1) \wedge N_{P_4}] \vee [a_3(t) \wedge y_1(t)] \vee [a_2(t) \wedge y_3(t)] \vee \vee [a_1(t) \wedge y_2(t) \wedge N_{P_2}] \vee [a_4(t) \wedge y_3(t) \wedge N_{P_1}]\Big|_{x_1};$$

$$S_2^{-1} = [a_1(t) \wedge a_3(t+1)] \vee [a_2(t) \wedge a_1(t+1) \wedge N_{P_3}] \vee \vee [a_4(t) \wedge a_3(t+1) \wedge N_{(1-P_4)}] \vee [a_3(t) \wedge a_1(t+1)] \vee \vee [a_1(t) \wedge y_2(t) \wedge N_{(1-P_2)}] \vee [a_2(t) \wedge y_1(t)] \vee \vee [a_3(t) \wedge y_3(t)] \vee [a_4(t) \wedge y_3(t) \wedge N_{(1-P_1)}]\Big|_{x_2};$$

$$S_3^{-1} = [a_1(t) \wedge a_4(t+1)] \vee [a_2(t) \wedge a_1(t+1) \wedge N_{(1-P_3)}] \vee \vee [a_3(t) \wedge a_2(t+1)] \vee [a_4(t) \wedge a_4(t+1)] \vee [a_1(t) \wedge y_1(t)] \vee \vee [a_2(t) \wedge y_2(t)] \vee [a_3(t) \wedge y_2(t)] \vee [a_4(t) \wedge y_1(t)]\Big|_{x_3};$$

$$S_4^{-1} = \overline{S_1^{-1} \vee S_2^{-1} \vee S_3^{-1}}\Big|_{e}.$$

Здесь $N_P$ — переменная величина, вероятность появления которой равна $P$.

На рис. 1 приводится вариант построения обратимого автомата класса I. Работа автомата в такте прямого функционирования ничем не отличается от общеизвестных принципов действия. В такте обратного функционирования с помощью комбинационных логических преобразователей осуществляется определение значения входного сигнала $x(t)$ на основе настоящего $a(t+1)$ и предшествующего $a(t)$ состояний автомата или на основе состояния автомата $a(t)$ и выходного сигнала $y(t)$, с использованием вероятностной составляющей $P$.

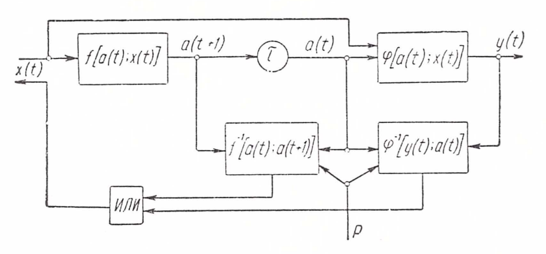



Рис. 1. Возможный вариант построения обратимого конечного автомата класса I.

Один из возможных вариантов представления графа для приведенного в примере обратимого конечного автомата класса I дан на рис. 2. По сплошным линиям графа можно определить значение выходного сигнала $y$ и последующее состояние автомата $a(t+1)$ при воздействии определенного значения входного сигнала $x$, а также значение входного сигнала $x$ при имеющемся состоянии автомата $a(t)$ и воздействии на него выходного сигнала $y$. По пунктирным линиям можно определить значение входного сигнала $x$ при известных предшествующем и последующем состояниях автомата.

Касаясь вопроса о возможных применениях обратных и обратимых конечных автоматов класса I, следует указать, что к ним могут быть сведены задачи технической диагностики, когда по известным выходной реакции и состоянию автомата требуется определить неконтролируемый входной параметр $x(t)$, или при аварийной ситуации определить сигнал воздействия, вызвавший эту ситуацию и т. п.

Обратный конечный автомат класса II позволяет на основе настоящего состояния автомата и выходного сигнала определять не только сигнал, действующий на входе автомата, но и предшествующее его состояние. Работа такого автомата может быть охарактеризована обратной функцией входов

$$x(t) = \psi^{-1}[a(t+1);\ y(t)]$$

и обратной функцией переходов

$$a(t) = \gamma^{-1}[a(t+1); y(t)],$$

которые находятся на основе прямых операторов исходного автомата Мили $f$ и $\varphi$, заданных таблицами выходов и переходов.

Для автоматов этого класса так же, как для обратных конечных автоматов класса I, обратные операторы только в некоторых частных случаях могут быть однозначными. Условия однозначности

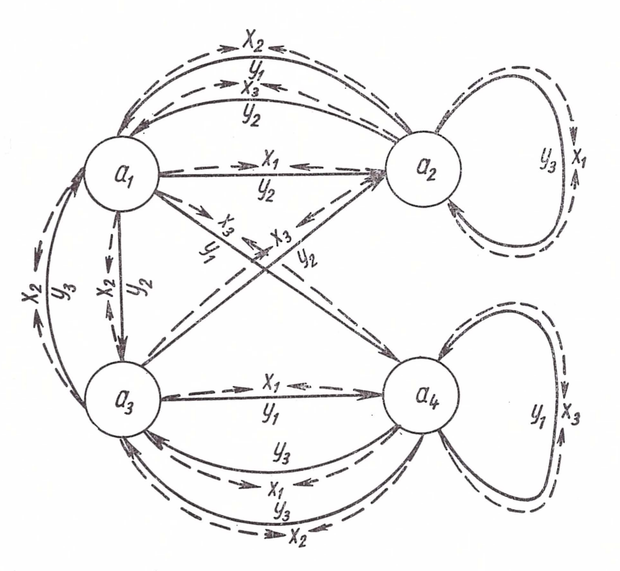



Рис. 2. Граф обратимого конечного автомата класса I.

определяются по таблице выходов и переходов исходного автомата Мили и формулируются следующим образом:

1. Если упорядоченная пара элементов $[a_i(t+1);\ y_j(t)]$ не повторяется в таблице выходов и переходов более одного раза, то обратные функции, заданные операторами $\psi^{-1}$ и $\gamma^{-1}$, для этого набора являются однозначными.

2. Если упорядоченная пара элементов $[a_i(t+1);\ y_j(t)]$ повторяется более одного раза только в одной строке таблицы выходов и переходов исходного автомата Мили, то обратная функция, заданная оператором $\psi^{-1}$, для этого набора является однозначной.

3. Если упорядоченная пара элементов $[a_i(t+1);\ y_j(t)]$ повторяется более одного раза только в одном столбце таблицы выходов и переходов исходного автомата Мили, то обратная функция, заданная оператором $\gamma^{-1}$, для этого набора является однозначной.

Аналогично можно сформулировать условие неоднозначности обратных операторов.

Если упорядоченная пара элементов $[a_i(t+1); y_j(t)]$ повторяется более одного раза не только в столбце или строке таблицы выходов и переходов исходного автомата Мили, то обратные функции, заданные операторами $\psi^{-1}$ и $\gamma^{-1}$, для этого набора не являются однозначными.

Таким образом, обратный конечный автомат класса II является детерминированным по входам (условие 2) в тех случаях, когда исходный прямой автомат переходит в одно и то же последующее состояние с выдачей одинаковых выходных сигналов при воздействии одного и того же входного сигнала независимо от предшествующего состояния; является детерминированным по состояниям (условие 3) в тех случаях, когда исходный прямой автомат переходит в одно и то же последующее состояние с выдачей одинаковых выходных сигналов из одного и того же предыдущего состояния независимо от входного сигнала; является детерминированным по входам и состояниям (условие 1), когда исходный прямой автомат переходит в последующее состояние с выдачей различных выходных сигналов.

При этом неопределенности в определении $a(t)$ для автоматов, детерминированных по входам, разрешаются с использованием априорных значений вероятностей $P_a$; неопределенности в определении $x(t)$ для автоматов, детерминированных по состоянию,— с помощью вероятностей $P_x$; неопределенности в определении возможной пары $[a(t); x(t)]$ — с помощью $P_{ax}$.

Определим правило нахождения обратных операторов $\psi^{-1}$ и $\gamma^{-1}$ по заданным прямым операторам $f$ и $\varphi$, пользуясь табличным способом задания определяемых ими функций: функции выходов и функции переходов прямого автомата; обратной функции входов и обратной функции переходов обратного автомата класса II. При этом будем оперировать совмещенной таблицей выходов и переходов как исходной для построения искомой совмещенной таблицы обратных входов и переходов.

Для того чтобы построить таблицу обратных входов и переходов, нужно столбцы таблицы поименовать символами $a_i(t+1)$, соответствующими внутренним состояниям автомата, а строки таблицы — символами $y_j(t)$, соответствующими выходным сигналам прямого автомата. В клетки таблицы, находящиеся на пересечении столбца с символом $a_i(t+1)$ со строкой — $y_j(t)$, записываются символы состояния автомата $a_r(t)$, из которого он переходит в состояние $a_i(t+1)$ и входного сигнала $x_q$, вызывающего этот переход. Для этого необходимо символы $a_r(t)$ и $x_q$, определяющие клетку исходной таблицы со значениями $a_i(t+1)$ и $y_j(t)$, записать в клетку искомой таблицы, определяемую значениями $a_i(t+1)$ и $y_j(t)$. Клетки, оставшиеся свободными после окончания этой операции, заполняются пустым словом $e$. В клетках, соответствующих обратным переходам, детерминированным по входам, записываются значения вероятности появления состояний $P_a$. В клетках, соответствующих обратным переходам, детерминированным по состояниям, записыва-

ются значения вероятности появления символов входа $P_x$. В клетках, соответствующих обратным переходам недетерминированным ни по входам, ни по состоянию, записываются значения вероятности появления пары символов $x_q$ и $a_r(t)$ — $P_{ax}$.

В качестве примера приводятся операторы $\psi^{-1}$ и $\gamma^{-1}$, заданные таблицей обратного функционирования для прямого конечного автомата, определяемого табл. 1. Сумма значений вероятности в каждой клетке табл. 3 равна $1 - (P' + P'' + \ldots + P^e) = 1$.

Таблица 3

| $a(t+1)$ / $y(t)$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | $x_2$ $a_2$ | $e$ | $e$ | $x_1(P'_{2ax})$ $a_3(P'_{2ax})$; $x_3(P''_{2ax})$ $a_1(P''_{2ax};\ P'_a)$ $a_4(P''_{2ax};\ P''_a)$ |
| $y_2$ | $x_3$ $a_2$ | $x_1(P'_{1ax})$ $a_1(P'_{1ax})$; $x_3(P''_{1ax})$ $a_3(P''_{1ax})$ | $x_2$ $a_1$ | $e$ |
| $y_3$ | $x_2$ $a_3$ | $x_1$ $a_2$ | $x_1(P'_x)$ $x_2(P''_x)$ $a_4$ | $e$ |

В регулярной форме алгоритм работы обратного автомата класса II для рассматриваемого примера запишется так:

$$S_{22} = [y_1(t) \wedge a_1(t+1)]\Big|_{x_2;\ a_2} \qquad S_{14} = N(P'_{1x})\,[y_3(t) \wedge a_3(t+1)]\Big|_{x_1;\ a_4}$$

$$S_{32} = [y_2(t) \wedge a_1(t+1)]\Big|_{x_3;\ a_2} \qquad S_{24} = N(P''_{1x})\,[y_3(t) \wedge a_3(t+1)]\Big|_{x_2;\ a_4}$$

$$S_{23} = [y_3(t) \wedge a_1(t+1)]\Big|_{x_2;\ a_3} \qquad S_{13} = N(P'_{2ax})\,[y_1(t) \wedge a_4(t+1)]\Big|_{x_1;\ a_3}$$

$$S_{12} = [y_3(t) \wedge a_2(t+1)]\Big|_{x_1;\ a_2} \qquad S_{31} = N(P''_{2ax}P'_a)\,[y_1(t) \wedge a_4(t+1)]\Big|_{x_3;\ a_2}$$

$$S_{21} = [y_2(t) \wedge a_3(t+1)]\Big|_{x_2;\ a_1} \qquad S_{34} = N(P''_{2ax}P''_a)\,[y_1(t) \wedge a_4(t+1)]\Big|_{x_3;\ a_4}$$

$$S_{11} = N(P'_{1ax})\,[y_2(t) \wedge a_2(t+1)]\Big|_{x_1;\ a_1} \qquad S_{33} = N(P''_{1ax})[y_2(t) \wedge a_2(t+1)]\Big|_{x_3;\ a_3}$$

$$\overline{S = S_{11} \vee S_{12} \vee S_{13} \vee S_{14} \vee S_{21} \vee S_{22} \vee S_{23} \vee S_{24} \vee S_{31} \vee S_{32} \vee S_{33} \vee S_{34}}\,|\,e.$$

Здесь $N(P)$ — переменная величина, вероятность появления которой равна $P$.

На рис. 3 представлена функциональная схема одного из возможных вариантов обратимого конечного автомата класса II. В основу

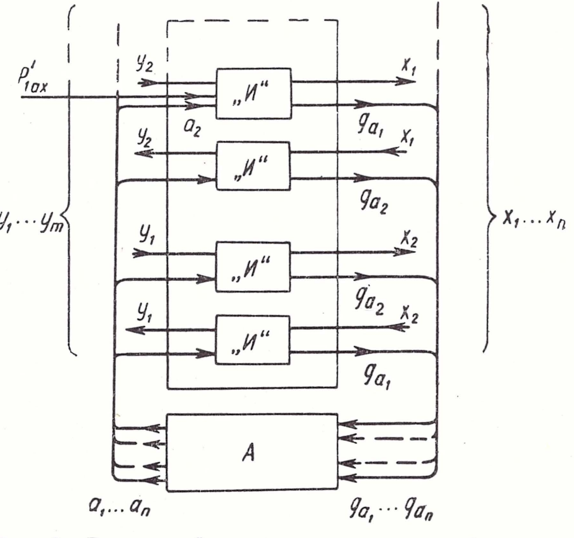



Рис. 3. Возможный вариант построения обратимого конечного автомата класса II.

построения схемы положено свойство «обратимости» элементарного перехода обратимого автомата класса II, заключающееся в том, что всегда выполняется соотношение

$$y(t) \wedge a(t+1) \wedge a(t) \wedge x(t) = 1.$$

Разбивая приведенное соотношение на системы уравнений и добавляя значения вероятностей, можно получить

$$\begin{cases} a(t) \wedge x(t) = a(t+1), \\ a(t) \wedge x(t) = y(t); \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(t+1) \wedge y(t) \wedge [N(P_{ax}) \vee N(P_a)] = a(t), \\ a(t+1) \wedge y(t) \wedge [N(P_{ax}) \vee N(P_x)] = x(t). \end{cases}$$

Для реализации этих соотношений используются логические комбинационные схемы. Входные сигналы для них $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ поступают от исходного прямого автомата, выходные же сигналы $q_{a_1}$, $q_{a_2}$, ..., $q_{a_n}$ служат для управления этим автоматом. Пусть, например, автомат $A$ находится в состоянии $a_2$ и на вход ему поступает сигнал $x_2$. Тогда с помощью схемы «И» формируется сигнал возбуждения автомата $q_{a_1}$, переводящий его в состояние $a_1$, и выходной сигнал $y_1$. Если автомат находится в состоянии $a_1$, а на выход ему поступает сигнал $y_1$, то формируется сигнал возбуждения $q_{a_2}$ и входной сигнал $x_2$ и т. д.

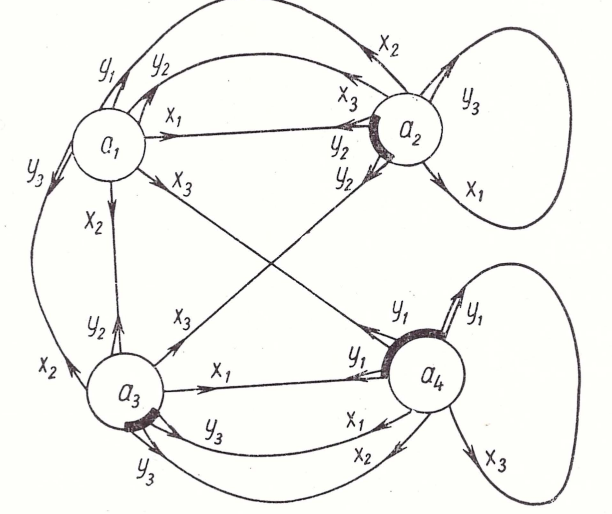



Рис. 4. Граф обратимого конечного автомата класса II.

На рис. 4 приведен граф обратимого конечного автомата класса II.

Переход автомата из состояния $a(t)$ в состояние $a(t+1)$ в такте прямого функционирования отмечается одинарной стрелкой и входным сигналом $x$, вызывающим этот переход; а переход автомата из состояния $a(t+1)$ в состояние $a(t)$ в такте обратного функционирования — двойной стрелкой и выходным сигналом $y$, вызывающим этот переход. Жирными линиями по контурам узлов графа объединены обратные переходы, недетерминированные либо по входам, либо по состояниям, либо и по входам, и по состояниям.

К числу применений обратных и обратимых автоматов класса II можно отнести, например, ассоциативную выборку из памяти образов по заданному их классу, решение всевозможных задач методом дедукции, и поиска причин, вызвавших данное следствие и т. д.

## Замкнутые схемы с обратными конечными автоматами

При решении некоторых информационных задач, требующих восстановления всей цепи причинно-следственных связей, могут найти применение схемы с обратными автоматами, работающими по замкнутому циклу.

Возможный вариант построения схемы, работающей по замкнутому циклу, представлен на рис. 5,*а*.

Здесь используется обратный конечный автомат класса II, реализующий функции

$$a(t) = \gamma^{-1}[a(t+1);\ y(t)];$$

$$x(t) = \psi^{-1}[a(t+1);\ y(t)],$$

Рис. 5. Схема с обратным автоматом класса II, работающая по замкнутому циклу:

*а* — без останова; *б* — с остановом по заданному выходному сигналу.

и вероятностный функциональный преобразователь, реализующий функцию $y(t-1) = \lambda^{-1}\{a(t);\ P[a(t+1); x(t)]\}$. Обратный оператор $\lambda^{-1}$ определяется на основе функции выходов исходного прямого автомата $y(t) = \varphi[a(t); x(t)]$.

Посредством такой замкнутой системы обратного функционирования можно производить «проигрывание» последовательности событий, имевших место для исходного прямого автомата, в направлении, обратном их «историческому» развитию. При этом на выходы его поступают сигналы выходного $Y$ и соответствующего им входного $X$ алфавитов.

Функционирование схемы начинается с момента воздействия на ее вход сигнала $y(t)$, в результате чего обратный автомат из состояния $a(t+1)$ переходит в состояние $a(t)$ с формированием сигнала $x(t)$. В соответствии с новым состоянием автомата $a(t)$ с помощью функционального вероятностного преобразователя формируется сигнал $y(t-1)$, который воздействует на вход схемы и дает тем самым начало следующему такту работы устройства.

В качестве вероятностных величин для функционального преобразователя используются априорные вероятности, которые в общем случае могут быть функциями либо от состояния автомата, либо от сигнала входного алфавита $X$, либо от того и другого одновременно, чем может обеспечиваться корреляционная связь между предыдущим и последующим состояниями обратного автомата. Таким образом, этой связью с большей или меньшей степенью вероятности определяется то или иное из возможных направление обратного развертывания цепи событий.

Многократное повторение циклов работы схемы позволяет не только производить развертывание цепи причинно-следственных связей, но и дает возможность строить плотности вероятностей для различных версий (последовательностей событий) при переходе от $y_i$ к $y_j$, либо от $a_r$ к $a_q$ и т. д.

Однократное проигрывание некоторой цепи событий с помощью схемы, работающей по замкнутому циклу, по одному из вероятных частных циклов позволяет решать задачи по определению последовательности входных сигналов $X$, необходимой для получения на выходе автомата заданного выходного сигнала $y$. Пример построения такой схемы приведен на рис. 5,*б*. Функционирование ее происходит таким же образом, как предыдущей, но при совпадении сигнала выходного алфавита $Y$ с сигналом установки $y_{уст}$ с помощью схем сравнения (Сх. ср.), «НЕ» и «И» производится выключение входной цепи функционального преобразователя, что приводит к останову схемы.

## Многошаговые обратные конечные автоматы класса I

Обычно используемые функции переходов и выходов для описания конечных автоматов Мили

$$a(t+1) = f\,[a(t);\ x(t)],$$
$$y(t) = \varphi\,[a(t);\ x(t)]$$

характеризуют реакцию автомата на каждый из символов входного алфавита, поступающих последовательно по тактам.

На основе этих функций могут быть описаны реакции автомата на входные слова, состоящие из последовательности символов

$$a(t+k) = f_м\,[a(t);\ x(t);\ x(t+1);\ \ldots;\ x(t+k-1)] =$$
$$= f_м\,[a(t);\ X^t_{t+k-1}],$$
$$y(t+k-1) = \varphi_м\,[a(t);\quad X^t_{t+k-1}].$$

Такие функции определяют состояние автомата и выходной сигнал через $k$ тактов после начала поступления входного слова $X^t_{t+k-1}$.

При функционировании обратных конечных автоматов могут возникать ситуации, при которых пары аргументов из алфавитов $A$ и $Y$, появляющиеся на их входах и являющиеся смежными по времени, по какой-либо причине не являются такими, исходя из функци-

онирования прямого автомата, а сдвинуты на $k - 1$ тактов. Такие автоматы задаются функциями

$$X^t_{t+k-1} = f_м^{-1}\,[a\,(t);\;a\,(t+k)];$$

$$X^t_{t+k-1} = \varphi_м^{-1}\,[a\,(t);\;y\,(t+k-1)]$$

и относятся к многошаговым.

Многошаговый обратный конечный автомат класса I позволяет на основе информации о двух внутренних состояниях автомата или на основе его настоящего состояния и выходного сигнала определить входное слово, действующее на его входе конечное число тактов.

Операторы $f_м^{-1}$ и $\varphi_м^{-1}$, описывающие работу многошагового обратного конечного автомата, так же как и обратные операторы $f^{-1}$ и $\varphi^{-1}$, описывающие работу одношагового обратного конечного автомата, в общем случае не могут быть однозначными, за исключением частных случаев, при которых для каждой ситуации возможен только один путь многошагового процесса. В остальных случаях искомое входное слово может быть получено с использованием априорных вероятностных соотношений. Для сокращения количества возможных вероятностных решений можно заменять их детерминированными, там, где это допустимо, исходя из выбора найкратчайшего многошагового пути.

Определим правило нахождения обратного оператора $f_м^{-1}$. Для этого необходимо, пользуясь таблицей переходов исходного прямого автомата или его графом, выписать возможные входные слова (последовательности входных сигналов) $x_l, \ldots, x_p$ для всех интересующих ситуаций — пар внутренних состояний

$$A_{ij} = [a_i\,(t);\;\;a_j\,(t+k)].$$

Далее составляется совмещенная таблица переходов и выходов многошагового обратного конечного автомата. Входными сигналами для такого автомата будут сочетания внутренних состояний $a\,(t)$ и $a\,(t+k)$; выходными — буквы искомого входного слова. Промежуточные внутренние состояния находятся путем определения переходов исходного прямого автомата при воздействии на его вход найденных выше входных слов. Неоднозначные решения записываются в этой таблице с указанием значения их вероятности.

П р и м е р. Исходный конечный автомат задан таблицей функционирования (табл. 1). Определим значения возможных входных слов для различных сочетаний $a\,(t)$ и $a\,(t+k)$. Результаты оформим в виде табл. 4. Циклические пути из таблицы исключены, входные слова найдены из условия выбора кратчайшего пути, а в общем случае таблица усложняется.

Построим таблицу переходов и выходов многошагового автомата класса I (табл. 5). Символом $A_{t,t+k}$ в ней обозначены входные сигналы, соответствующие сочетаниям внутренних состояний $a\,(t)$ и $a\,(t+k)$.

Таблица 4

| $a(t+k)$ \ $a(t)$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | $e$ | $x_2(P_1)$<br>$x_3(1-P_1)$ | $x_2$ | $x_2;\ x_2(P_2)$<br>$x_1;\ x_2(1-P_2)$ |
| $a_2$ | $x_1$ | $x_1$ | $x_3$ | $x_2;\ x_3(P_3)$<br>$x_1;\ x_3(1-P_3)$ |
| $a_3$ | $x_2$ | $x_2;\ x_2(P_4)$<br>$x_3;\ x_2(1-P_4)$ | $e$ | $x_1(P_5)$<br>$x_2(1-P_5)$ |
| $a_4$ | $x_3$ | $x_2;\ x_3(P_6)$<br>$x_3;\ x_3(1-P_6)$ | $x_1$ | $x_3$ |

На рис. 6 приведен граф многошагового обратного автомата класса I, реализующего оператор $f_{\text{м}}^{-1}$.

Обратный многошаговый конечный автомат класса I можно представить схемой, изображенной на рис. 1, заменив лишь устройства,

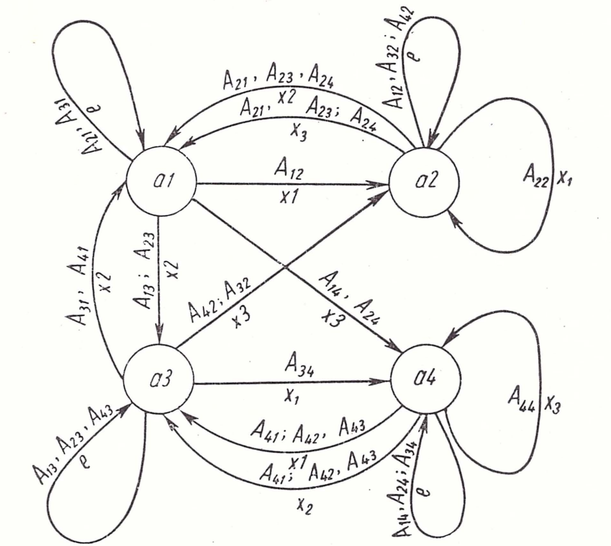



Рис. 6. Граф функционирования многошагового обратного конечного автомата класса I.

реализующие операторы $f^{-1}[a(t);\ a(t+1)]$ и $\varphi^{-1}[a(t);\ y(t)]$, на устройства, реализующие операторы $f_{\text{м}}^{-1}[a(t);\ a(t+k)]$ и $\varphi_{\text{м}}^{-1}[a(t);\ y(t+k-1)]$ соответственно.

Определим теперь правило нахождения обратного оператора $\varphi_{\text{м}}^{-1}$. Для этого по таблице выходов или графу исходного прямого

Таблица 5

| $A_{t,t+k}$ \ $a(t)$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_{11}$ | $a_1$ / $e$ | $a_2$ / $e$ | $a_3$ / $e$ | $a_4$ / $e$ |
| $A_{12}$ | $a_2$ / $x_1$ | $a_2$ / $e$ | $a_3$ / $e$ | $a_4$ / $e$ |
| $A_{13}$ | $a_3$ / $x_2$ | $a_2$ / $e$ | $a_3$ / $e$ | $a_4$ / $e$ |
| $A_{14}$ | $a_4$ / $x_3$ | $a_2$ / $e$ | $a_3$ / $e$ | $a_4$ / $e$ |

| $A_{t,t+k}$ \ $a(t)$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_{21}$ | $a_1$ / $e$ | $a_1$ / $x_2(P_1)$, $x_3(1-P_1)$ | $a_3$ / $e$ | $a_4$ / $e$ |
| $A_{22}$ | $a_1$ / $e$ | $a_2$ / $e(1-P_7)$, $x_1(P_7)$ | $a_3$ / $e$ | $a_4$ / $e$ |
| $A_{23}$ | $a_3$ / $x_2$ | $a_1$ / $x_2(P_4)$, $x_3(1-P_4)$ | $a_3$ / $e$ | $a_4$ / $e$ |
| $A_{24}$ | $a_4$ / $x_3$ | $a_1$ / $x_2(P_6)$, $x_3(1-P_6)$ | $a_3$ / $e$ | $a_4$ / $e$ |

| $A_{t,t+k}$ \ $a(t)$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_{31}$ | $a_1$ / $e$ | $a_2$ / $e$ | $a_1$ / $x_2$ | $a_4$ / $e$ |
| $A_{32}$ | $a_1$ / $e$ | $a_2$ / $e$ | $a_2$ / $x_3$ | $a_4$ / $e$ |
| $A_{33}$ | $a_1$ / $e$ | $a_2$ / $e$ | $a_3$ / $e$ | $a_4$ / $e$ |
| $A_{34}$ | $a_1$ / $e$ | $a_2$ / $e$ | $a_4$ / $x_1$ | $a_4$ / $e$ |

| $A_{t,t+k}$ \ $a(t)$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_{41}$ | $a_1$ / $e$ | $a_2$ / $e$ | $a_1$ / $x_2$ | $a_3$ / $x_2(P_2)$, $x_1(1-P_2)$ |
| $A_{42}$ | $a_1$ / $e$ | $a_2$ / $e$ | $a_2$ / $x_3$ | $a_3$ / $x_2(P_3)$, $x_1(1-P_3)$ |
| $A_{43}$ | $a_1$ / $e$ | $a_2$ / $e$ | $a_3$ / $e$ | $a_3$ / $x_1(P_5)$, $x_2(1-P_5)$ |
| $A_{44}$ | $a_1$ / $e$ | $a_2$ / $e$ | $a_3$ / $e$ | $a_4$ / $e(1-P_8)$, $x_3(P_8)$ |

автомата выписываются возможные входные слова для пар внутренних состояний $a(t)$ и выходных сигналов $y(t+k-1)$. Далее составляется таблица переходов и выходов. Входными сигналами для такого автомата будут символы из алфавита $Y$, выходными — буквы

искомого входного слова. Промежуточные внутренние состояния находятся так же, как и в предыдущем случае. Так же записываются и значения вероятностей.

Таблица 6

| $a(t)$ / $y(t+k-1)$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | $x_3$ | $x_2$ | $x_1$ | $x_3$ |
| $y_2$ | $x_1(P_2')$<br>$x_2(P_2'')$ | $x_3$ | $x_3$ | $x_1x_3(P_3')$<br>$x_2x_3(P_3'')$<br>$x_1x_2x_1(P_3''')$ |
| $y_3$ | $x_1x_1(P_4')$<br>$x_3x_1(P_4'')$<br>$x_3x_2(P_4''')$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_1(P_1')$<br>$x_2(P_1'')$ |

Таблица 7

| $a(t)$ / $y(t+k-1)$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | $x_3$<br>$a_4$ | $x_2$<br>$a_1$ | $x_1$<br>$a_4$ | $x_3$<br>$a_4$ |
| $y_2$ | $x_1(P_2')$<br>$x_2(P_2'')$<br>$a_2(P_2')$<br>$a_3(P_2'')$ | $x_3$<br>$a_1$ | $x_3$<br>$a_2$ | $x_1(P_3', P_3''')$<br>$x_2(P_3'')$<br>$a_3$ |
| $y_3$ | $x_1(P_4')$<br>$x_3(P_4'', P_4''')$<br>$a_2(P_4')$<br>$a_4(P_4''', P_4'')$ | $x_1$<br>$a_2$ | $x_2$<br>$a_1$ | $x_1(P_1')$<br>$x_2(P_1'')$<br>$a_3$ |

Рассматривается пример построения таких таблиц для автомата Мили, заданного табл. 1: таблица возможных входных слов для многошагового обратного конечного автомата (табл. 6) и таблица переходов и выходов многошагового конечного автомата класса I (табл. 7). Входные слова найдены из условия выбора кратчайшего пути.

В некоторых случаях может быть использован совмещенный обратный оператор $F_м^{-1}$, который находится на основе операторов $f_м^{-1}$ и $\varphi_м^{-1}$ и определяет функцию

$$X_{t+k-1}^{t} = F_м^{-1}\,[a\,(t);\ a\,(t+k);\ y\,(t+k-1)].$$

Количество детерминированных значений такой функции больше, чем функций, задаваемых операторами $f_м^{-1}$ или $\varphi_м^{-1}$ в отдельности.

Используя аналогичные методы задания, можно определить операторы многошаговых обратных конечных автоматов класса II.

## Выводы

1. В зависимости от типа обратных операторов и от способа задания обратных функций, можно различать обратные конечные автоматы Мили I и II классов и автоматы многошаговые и одношаговые.

2. Обратный автомат класса I позволяет определить сигнал, действующий на его входе на основе предыдущего и последующего состояний автомата или на основе настоящего состояния и выходного сигнала. Обратные и обратимые автоматы этого класса могут найти применение при решении задач технической диагностики.

3. Обратный автомат класса II позволяет определить не только сигнал, действовавший на его входе, но и предшествующее состояние автомата, на основе настоящего состояния и выходного сигнала. Обратные и обратимые автоматы этого класса могут найти применение в построении обратных моделей некоторых ситуаций, ассоциативной памяти и т. д.

4. Одношаговые обратные конечные автоматы являются частным случаем автоматов многошаговых.

5. Логические схемы, содержащие обратные автоматы и работающие по замкнутому циклу, позволяют проигрывать последовательности событий в направлении, обратном их историческому развитию, и могут найти применение при решении задач, требующих восстановления цепи причинно-следственных связей. Такие схемы по своим свойствам приближаются к многошаговым обратным автоматам класса II.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Пухов Г. Е.— В кн.: Вопросы теории и применения математического моделирования. «Советское радио», М., 1965.
2. Жук К. Д.— В кн.: Вопросы теории и применения математического моделирования. «Советское радио», М., 1965.

Доложено на семинаре
10 декабря 1965 г.

# К ОПРЕДЕЛЕНИЮ КОЭФФИЦИЕНТОВ УРАВНЕНИЯ СВЯЗИ МЕЖДУ УПРАВЛЯЮЩИМИ ВЕЛИЧИНАМИ И УКЛОНЕНИЯМИ ДЛЯ ОБЪЕКТОВ С НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

Ц. С. ХАТИАШВИЛИ

В работе рассматривается способ получения частных производных управляющих функций любого порядка по уклонениям для объектов с неполной информацией. При этом используются экспериментальные данные, содержащие случайные погрешности и одновременное изменение параметров в широких пределах.

Имеется некоторая выборка объемом $N$, $x^{(1)} \ldots x^{(N)}$, $y^{(1)} \ldots y^{(N)}$. По этой выборке необходимо вычислить значения частных производных, в общем случае до $n$ порядка, в точке $M(x_0, y_0)$. Допустим, что неизвестная функция такова, что в области взятой выборки возможно ее разложение в ряд Тейлора. Для $i$-ой компоненты вектора $y$ ряд Тейлора запишется так:

$$y_i = y_0 + \sum_j \frac{\partial y_i}{\partial x_i} \Delta x_j + \frac{1}{2!} \sum_p \sum_q \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_p \partial x_q} \Delta x_1 \Delta x_q + \ldots + \frac{1}{n!} \frac{\partial^n y_i}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} \Delta x_1 \ldots \Delta x_n \quad (1)$$

$$[i = \overline{1n},\ p = \overline{1m},\ q = \overline{1m},\ j = \overline{1m}].$$

Введем обозначения

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = a_{i,j}, \quad \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_p \partial x_q} = a_{i,pq}, \ \ldots, \ \frac{\partial^n y_i}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} = a_{i,1\ldots n}.$$

В этом случае ряд (1) имеет вид:

$$\Delta y_i = \sum_j a_{i,j} \Delta x_j + \sum_p \sum_q a_{i,pq} \Delta x_p \Delta x_q + \ldots + \frac{1}{n!} a_{i,l \ldots n} \Delta x_1 \ldots \Delta x_n. \quad (2)$$

По данной выборке определим значения приращений $\Delta x_j^{(l)}$ и $\Delta y_i^{(l)}$ относительно точки $M(x_0, y_0)$. В силу того, что вектор $y$ подвержен случайным погрешностям, значение $\Delta y_i$, вычисленное по формуле (2), и значение $\Delta y_i^{(l)}$, полученное по выборке для одних и тех же $\Delta x$, не будут совпадать, т. е. $\Delta y_i \neq \Delta y_i^{(l)}$. Изложенное выше дает возможность говорить о наличии дисперсии между этими величинами. Для выборки объемом $N$ оценку этой дисперсии можно записать в следующем виде:

$$D_i = \frac{\sum (\Delta y_i - \Delta y_i^{(l)})^2}{N-1}, \tag{3}$$

или, обозначив приращение второго порядка через $z$, имеем

$$D_i = \frac{\sum z^2}{N-1}. \tag{4}$$

Минимизируя дисперсию по каждому из искомых параметров, получим

$$\frac{\partial D_i}{\partial a_{i,j}} = 0, \quad \frac{\partial D_i}{\partial a_{i,pq}} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial D_i}{\partial a_{i,1\ldots n}} = 0, \tag{5}$$

или, подставив выражение (2) в формулу (3) и продифференцировав полученное уравнение по неизвестным коэффициентам, получим систему

$$\begin{gathered}
\sum_j a_{i,j} \sum_l \Delta x_j^{(l)} \Delta x_1^{(l)} + \frac{1}{2!} \sum_p \sum_q a_{i,pq} \sum_l \Delta x_p^{(l)} \Delta x_q^{(l)} \Delta x_1^{(l)} + \ldots + \\
+ \frac{1}{n!} a_{i,1\ldots n} \sum_l \Delta x_1^{(l)} \ldots \Delta x_n^{(l)} \cdot \Delta x_1^{(l)} = \sum_l \Delta y_i^{(l)} \Delta x_1^{(l)}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\sum_j a_{i,j} \sum_l \Delta x_j^{(l)} \Delta x_n^{(l)} + \frac{1}{2!} \sum_p \sum_q a_{i,pq} \sum_l \Delta x_p^{(l)} \Delta x_q^{(l)} \Delta x_n^{(l)} + \ldots + \\
+ \ldots + \frac{1}{n!} a_{i,1\ldots n} \Delta x_1^{(l)} \ldots \Delta x_n^{(l)} \Delta x_n^{(l)} = \sum_l \Delta y_i^{(l)} \Delta x_n^{(l)}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\sum_j a_{i,j} \sum_l \Delta x_j^{(l)} \Delta x_1^{(l)} \ldots \Delta x_n^{(l)} + \frac{1}{2!} \sum_p \sum_q a_{i,pq} \Delta x_p^{(l)} \Delta x_q^{(l)} \Delta x_1^{(l)} \ldots \Delta x_n^{(l)} + \\
+ \ldots + \frac{1}{n!} a_{i,1\ldots n} \Delta x_1^{(l)} \ldots \Delta x_n^{(l)} \Delta x_1^{(l)} \ldots \Delta x_n^{(l)} = \sum_l \Delta y_i^{(l)} \Delta x_1^{(l)} \ldots \Delta x_n^{(l)}.
\end{gathered} \tag{6}$$

Из полученной системы можно определить частные производные любого порядка.

Сказанное можно использовать для аппроксимации случайной векторной функции и векторной функции со случайными аргументами. Так как случайная векторная функция получена наложением случайных возмущений на функцию

$$y = \Phi(x), \tag{7}$$

которая в действительности описывает объект, то функцию (7) можно считать аппроксимирующей для случайной векторной функции. Следовательно, любая зависимость, аппроксимирующая функцию (7), будет аппроксимирующей и для случайной векторной функции. Допустим, что функция (7) такова, что возможна ее аппроксимация уравнением (2). Коэффициенты этого уравнения $a$ можно найти из системы (3). Ограничиваясь линейными членами уравнения (2), получим прямую, проведенную через одну точку опыта с минимизацией квадрата расстояний до других точек. Для уравнения, содержащего и нелинейные члены уравнения (2), это будет парабола соответствующей степени, проведенная через точку с минимизацией расстояния $z$. Параметр $z$ является приращением второго порядка. Как известно, классический метод наименьших квадратов использует минимизацию суммы приращений первого порядка. Поэтому описанный в данной работе способ дает гораздо большую точность аппроксимации, чем метод наименьших квадратов при одной и той же выборке, или при аппроксимации данным способом необходим гораздо меньший объем выборки. При этом всегда известна область минимальной погрешности аппроксимации: она расположена вокруг точки $M(x_0, y_0)$. Объем выборки вычисляется по формуле

$$N = (3 \div 5)(n + k - 1),$$

где $N$ — объем выборки; $n$ — мерность объекта; $k$ — порядок подлежащих определению частных производных.

Доложено на семинаре
10 июня 1966 г.

# ОПТИМАЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ НАСТРОЙКИ ДИСКРЕТНОГО КОРРЕКТОРА ПО МИНИМУМУ СУММАРНОЙ АБСОЛЮТНОЙ ПОГРЕШНОСТИ

В. А. КИСЕЛЬ

В статье предложены два алгоритма, позволяющие настроить дискретный корректор [1—3] таким образом, чтобы по окончании процесса настройки суммарная абсолютная погрешность уклонения выходного сигнала от сигнала заданной формы была минимальной.

Описываются модели корректоров, настройка которых выполняется автоматически согласно алгоритмам последовательной оптимизации и алгоритма скорейшего спуска.

## Постановка задачи

Исходные обозначения: $g_1(z)$ — сигнал, подлежащий коррекции; $g_2(z)$ — сигнал, который необходимо получить на выходе корректора; $K(z)$ — коэффициент передачи корректора,

$$g_1(z) = \sum_{k=-n}^{m} a_k z^k,$$

$$g_2(z) = \sum_{k=-(n_1+n)}^{m_1+m} c_k z^k, \quad K(z) = \sum_{k=-n_1}^{m_1} \alpha_k z^k.$$

Корректор с коэффициентом передачи $K(z)$ преобразует сигнал $g_1(z)$ в сигнал

$$g_2'(z) = g_1(z) K(z) = \sum_{k=-(n_1+n)}^{m_1+m} c_k' z^k,$$

где

$$c_k' = \sum_{i=-n_1}^{m_1} a_{k-i} \alpha_i. \tag{1}$$

Обозначим суммарную абсолютную погрешность уклонения сигнала $g_2^1(z)$ от $g_2(z)$ через $\Delta$:

$$\Delta = \sum_{k=-(n_1+n)}^{m_1+m} |c_k' - c_k|. \qquad (2)$$

Необходимо указать алгоритм, который позволил бы настроить корректор таким образом, чтобы при подаче на его вход сигнала $g_1(z)$ суммарная абсолютная погрешность уклонения выходного сигнала $g_2^1(z)$ от требуемого сигнала $g_2(z)$ была минимальной.

Алгоритм должен содержать последовательность действий, которая гарантирует достижение $\Delta_{\text{мин}}$ по окончании процесса настройки без каких-либо расчетов.

Прежде чем приступить к изложению возможных алгоритмов настройки, проанализируем функцию погрешности $\Delta$. Подставив значение (1) в формулу (2), получим

$$\Delta = \sum_{k=-(n_1+n)}^{m_1+m} \left| \sum_{i=-n_1}^{m_1} a_{k-i}\alpha_i - c_k \right|. \qquad (3)$$

Правая часть данного выражения является $(n_1 + m_1 + 2)$-мерной функцией относительно переменных $\alpha_k (-n_1 \leqslant k \leqslant m_1)$. В $(n_1 + m_1 + 2)$-мерном пространстве с координатными осями $\alpha_k$ выражение (3) описывает некоторую поверхность $\Delta$. Определим характер этой поверхности.

Рассмотрим сечение поверхности $\Delta$ плоскостями $X_n' (\alpha_{-n_1}', \alpha_{-n_1+1}', \ldots, \alpha_{n-1}', \alpha_n, \alpha_{n+1}', \ldots, \alpha_{m_1}')$, параллельными координатным плоскостям $X_n (\alpha_{-n_1}', \alpha_{-n_1+1}', \ldots, \alpha_{n-1}', 0, \alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_{m_1}')$. Здесь $\alpha_{-n_1}', \alpha_{-n_1+1}', \ldots, \alpha_k', \ldots, \alpha_{m_1}'$ $(k \neq n)$ — некоторые фиксированные значения переменных $\alpha_k$; $\alpha_n$ — текущая переменная $n$; $n$ — любое $(-n_1 \leqslant k \leqslant m_1)$. Пересечение поверхности $\Delta$ с плоскостью $X_n'$ дает кривую $L_n$, лежащую в $X_n'$, для нахождения уравнения которой необходимо в выражение (3) подставить $\alpha_i = \alpha_i'$ $(i \neq n)$.

При этом получим

$$L_n = \sum_{k=-(n_1+n)}^{m_1+m} |a_{k-n}\alpha_n + b_{k,n}|, \qquad (4)$$

где

$$b_{k,n} = \sum_{\substack{i=-n_1 \\ i \neq n}}^{m_1} a_{k-i}\alpha_i' - c_k.$$

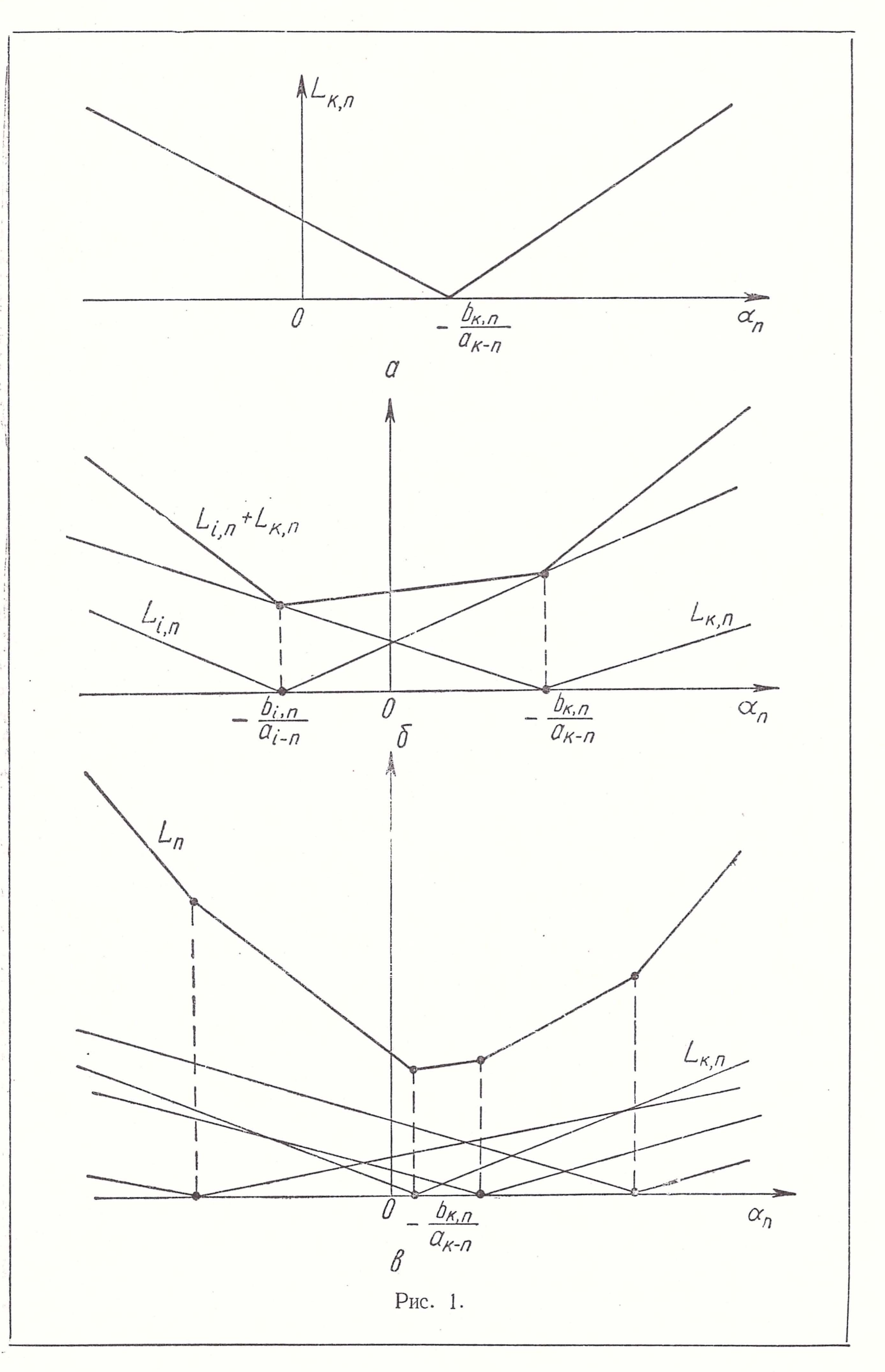

$L_{к,п}$
0
$-\frac{b_{к,п}}{a_{к-п}}$
$\alpha_п$
а
$L_{i,п}+L_{к,п}$
$L_{i,п}$
$L_{к,п}$
$-\frac{b_{i,п}}{a_{i-п}}$
0
$-\frac{b_{к,п}}{a_{к-п}}$
$\alpha_п$
б
$L_п$
$L_{к,п}$
0
$-\frac{b_{к,п}}{a_{к-п}}$
$\alpha_п$
в

Рис. 1.

Выражение (4) является функцией от переменной $\alpha_n$. Запишем $L_n$ как сумму элементарных функций вида

$$L_{k,n} = |a_{k-n}\alpha_n + b_{k,n}|,$$

$$L_n = \sum_{k=-(n_1+n)}^{m_1+m} L_{k,n}.$$

Очевидно, $L_{k,n}$ — непрерывная, кусочно-линейная функция, имеющая единственный минимум, равный нулю, при $\alpha_n = -\frac{b_{k,n}}{a_{k-n}}$ (рис. 1, *а*), т. е. $L_{k,n}$ — выпуклая функция.

Покажем, что $L_n$ также выпуклая функция. С этой целью рассмотрим сумму двух функций $L_{k,n}$ и $L_{i,n}$ (рис. 1, *б*). Как видно из этого рисунка, $L_{k,n} + L_{i,n}$ — непрерывная, кусочно-линейная, выпуклая функция, имеющая изломы в точках $\alpha_n' = -\frac{b_{k,n}}{a_{k-n}}$ и $\alpha_n'' = -\frac{b_{i,n}}{a_{i-n}}$, в которых обращаются в нуль соответственно $L_{k,n}$ и $L_{i,n}$. Минимум $L_{k,n} + L_{i,n}$ совпадает с одной из точек излома, следовательно, с одним из минимумов $L_{k,n}$ и $L_{i,n}$.

Анализируя сумму трех функций $L_{k,n}$, $L_{i,n}$, $L_{j,n}$, убеждаемся, что $L_{k,n} + L_{i,n} + L_{j,n}$ также выпуклая функция.

Нетрудно видеть, что сумма любого числа функций типа $L_{k,n}$ образует выпуклую функцию (рис. 1, *в*), следовательно, $L_n$ — выпуклая функция.

Согласно формуле (4), $L_n$ — непрерывная, кусочно-линейная функция, изломы которой находятся в точках обращения в нуль функций $L_{k,n}$, т. е. в точках $\alpha_n = -\frac{b_{k,n}}{a_{k-n}}$ $(-n_1 \leqslant k \leqslant m_1)$. Ее минимум совпадает по крайней мере с одной из точек $-\frac{b_{k,n}}{a_{k-n}}$.

Таким образом, показано, что сечение поверхности $\Delta$ произвольной плоскостью $X_n'$, параллельной любой координатной плоскости $X_n$, всегда дает выпуклую функцию $L_n$, имеющую минимум. Очевидно, поверхность $\Delta$ является выпуклой и имеет минимум, ибо только в этом случае все функции $L_n$ будут обладать указанным свойством. Из изложенного выше вытекает, что погрешность $\Delta$ — выпуклая функция, обладающая минимумом.

Нам необходимо определить коэффициенты $\alpha_k^*$, минимизирующие $\Delta$. Для нахождения значений этих коэффициентов в данном случае нет возможности непосредственно применить обычный способ отыскания экстремума функции нескольких переменных, который заключается в составлении и решении системы уравнений вида

$$\frac{d\Delta}{d\alpha_k} = 0 \qquad (-n_1 \leqslant k \leqslant m_1),$$

так как $\Delta$ — кусочно-линейная функция с разрывными частными производными $\frac{d\Delta}{d\alpha_k}$.

Однако, используя свойство $\Delta$ как выпуклой функции, можно определить $\overset{*}{\alpha}_k$ на основе метода последовательных приближений либо на основе метода скорейшего спуска. Из этих методов соответственно вытекают два алгоритма настройки корректора.

## Алгоритм настройки методом последовательной оптимизации

Нахождение $\overset{*}{\alpha}_k$ на основе метода последовательных приближений, называемого в дальнейшем также методом последовательной оптимизации, требует выполнения следующих операций.

1. Полагаем в формуле (3) коэффициенты $\alpha_k$ (кроме $\alpha_0$) равными нулю:

$$\alpha_k^0 = 0, \quad \alpha_0 \neq 0,$$

что превращает $\Delta$ в двумерную функцию относительно переменной $\alpha_0$:

$$\Delta = L_0^{(1)} = \sum_{k=-(n_1+n)}^{m_1+m} |a_k\alpha_0 - c_k| = \sum_{k=-(n_1+n)}^{m_1+m} L_{k,0}^{(1)}, \tag{5}$$

где

$$L_{k,0}^{(1)} = |a_k\alpha_0 - c_k|.$$

Полученная функция $L_0^{(1)}$ — выпуклая, поэтому найдем $\alpha_0^{(1)}$, соответствующее ее минимуму. Согласно изложенному выше, минимум $L_0^{(1)}$ совпадает с нулем одной из функций $L_{k,0}^{(1)}$, а именно, с одним из значений $\frac{c_k}{a_k}$ $(-n \leqslant k \leqslant m)$. Подставляя в выражении (5) $\alpha_0 = \frac{c_k}{a_k}$ $(-n \leqslant k \leqslant m)$ и вычисляя погрешность $\Delta = L_0^{(1)}$, берем в качестве $\alpha_0^{(1)}$ значение $\frac{c_k}{a_k}$, соответствующее минимуму $\Delta$.

2. Подставляя полученное значение $\alpha_0^{(1)}$ в формулу (3) и считая $\alpha_k^{(0)} = 0$ $(k \neq 0,1)$, рассмотрим $\Delta$ как функцию от переменной $\alpha_1$:

$$\Delta = L_1^{(1)} = \sum_{k=-(n_1+n)}^{m_1+m} |a_{k-1}\alpha_1 + b_{k,1}^{(1)}| = \sum_{k=-(n_1+n)}^{m_1+m} L_{k,1}^{(1)}, \tag{6}$$

где

$$L_{k,1}^{(1)} = |a_{k-1}\alpha_1 + b_{k,1}^{(1)}|,$$

$$b_{k,1}^{(1)} = a_k\alpha_0^{(1)} - c_k.$$

Функция $L_1^{(1)}$ — выпуклая, ее минимум совпадает с нулем одной из

функций $L_{k,1}^{(1)}$. Нули $L_{k,1}^{(1)}$ расположены в точках $-\frac{b_{k,1}^{(1)}}{a_{k-1}}$. Найдем $\alpha_1^{(1)}$, минимизирующее (6). Для этого последовательно полагаем $\alpha_1 = \frac{b_{k,1}^{(1)}}{a_{k-1}}$ $(-n_1 \leqslant k \leqslant m_1)$ и выбираем в качестве $\alpha_1^{(1)}$ значение $-\frac{b_{k,1}^{(1)}}{a_{k-1}}$, обращающее $\Delta = L_1^{(1)}$ в минимум.

3. Подставляем в формулу (3) $\alpha_0^{(1)}, \alpha_1^{(1)}, \alpha_k^{(0)} = 0\,(k \neq 0{,}1-1)$, и рассматриваем $\Delta$ как функцию от $\alpha_{-1}$

$$\Delta = L_{-1}^{(1)} = \sum_{k=-(n+n_1)}^{m+m_1} \left| a_{k+1}\alpha_{-1} + b_{k,-1}^{(1)} \right| = \sum_{k=-(n+n_1)}^{m+m_1} L_{k,-1}^{(1)},$$

где

$$L_{k,-1}^{(1)} = \left| a_{k+1}\alpha_{-1} + b_{k,-1}^{(1)} \right|,$$

$$b_{k,-1}^{(1)} = a_k\alpha_0^{(1)} + a_{k-1}\alpha_1^{(1)} - c_k.$$

Находим значение $\alpha_{-1}^{(1)}$, минимизирующее $L_{-1}^{(1)}$. Естественно, $\alpha_{-1}^{(1)}$ совпадает с одним из значений $-\frac{b_{k,-1}^{(1)}}{a_{k+1}}$.

4. Аналогичным образом определяем коэффициенты $\alpha_k^{(1)}$, каждый из которых минимизирует соответствующую ему функцию $L_k^{(1)}$.

Величины $\alpha_k^{(1)}$ являются приближенными значениями коэффициентов $\alpha_k^*$, поэтому уточняем данное решение. Полученные в результате уточнения коэффициенты обозначим через $\alpha_k^{(2)}$. Процесс уточнения аналогичен процессу нахождения $\alpha_k^{(1)}$.

Многократное повторение процесса уточнения дает ряд значений $\alpha_k^{(1)}, \alpha_k^{(2)}, \alpha_k^{(3)}, \ldots, \alpha_k^{(n)}$ и т. д.

При нахождении $\alpha_k^{(j)}$ в выражение для $\Delta$ (3) подставляются значения $\alpha_k^{(j-1)}$. Коэффициенты $\alpha_k^{(j)}$ для каждого $j$ и $k$ получаются из условия минимума соответствующей им функции $L_k^{(j)}$.

В силу выпуклости функции погрешности $\Delta$, значения $\alpha_k^{(j)}$ с возрастанием $j$ стремятся к $\alpha_k^*$

$$\lim_{j\to\infty} \alpha_k^{(j)} = \alpha_k^*.$$

Таким образом, описанный процесс последовательных приближений всегда обеспечивает получение искомого результата $\alpha_k^*$. Этот процесс может быть положен в основу расчета коэффициентов $\alpha_k^*$.

Однако мы используем метод последовательных приближений для осуществления настройки гармонического корректора,

Блок-схема корректора, реализующая настройку по данному методу, и его характеристика изображены на рис. 2, *а*, *б*.

Взаимодействие узлов схемы таково. Сигнал $g_1(t)$ периодически поступает на вход настраиваемого корректора. При этом на выходе возникает сигнал $g_2'(t)$ с дискретными значениями $g_2'(k\Delta t) = c_k'$. Ключ Кл. дискретизирует $g_2'(t)$, что дает сигнал $g_2'(z)$. Генератор эталонных сигналов (ГС) вырабатывает дискретный сигнал $g_2(z)$ заданной формы. Естественно, сигналы $g_2(z)$ и $g_1(z)$ соответствующим образом синхронизированы и сфазированы во времени.

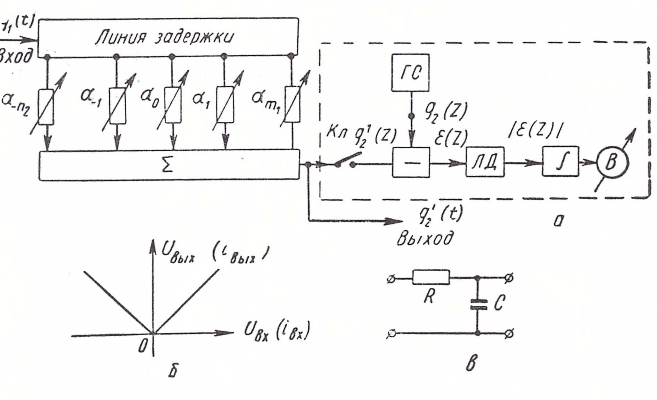



Рис. 2.

На выходе вычитающего устройства получим сигнал ошибки $\varepsilon(z) = g_2'(z) - g_2(z)$ со значениями $c_k' - c_k$. Линейный детектор (ЛД) дает абсолютное значение погрешности $|\varepsilon(z)|$. Интегрирующее устройство и индикатор (вольтметр В) указывают величину суммарной абсолютной погрешности $\Delta = \sum_{k=-(n_1+n)}^{m_1+m} |c_k' - c_k|$. В качестве интегратора может быть использована обычная $RC$-цепочка (рис. 2, *в*).

Алгоритм настройки непосредственно заключается в следующем.

1. Исходное состояние: все отводы $\alpha_k$, кроме $\alpha_0$, отключены, что дает $\alpha_k = 0$ $(k \neq 0)$, $\alpha_0 \neq 0$.

Вращаем регулятор $\alpha_0$ до тех пор, пока вольтметр В покажет минимальное значение погрешности $\Delta$. На этом прекращается регулировка отвода $\alpha_0$.

2. Включаем отвод $\alpha_1$ и регулятором $\alpha_1$ добиваемся минимального показания вольтметра. На этом настройка отвода $\alpha_1$ заканчивается.

3. Включаем отвод $\alpha_{-1}$ и добиваемся минимального показания вольтметра, после чего прекращаем регулировку $\alpha_{-1}$.

Аналогичным образом последовательно настраиваем остальные отводы $\alpha_2$, $\alpha_{-2}$, $\alpha_3$, $\alpha_{-3}$, ... и т. д.

Процесс настройки отводов $\alpha_k$ повторяется несколько раз, до тех пор, пока регулировка $\alpha_k$ уменьшает погрешность $\Delta$.

Подчеркнем, что алгоритм последовательной оптимизации всегда приводит к достижению $\Delta_{мин}$. В силу очевидной простоты алгоритма, настройку корректора можно выполнить автоматически с использованием схемы, указанной на рис. 3.

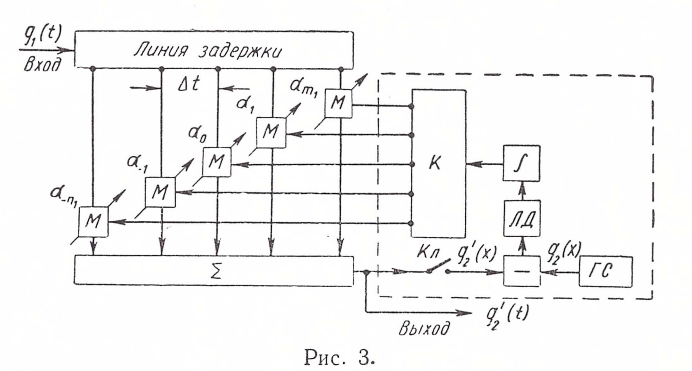



Рис. 3.

Здесь вращение регуляторов осуществляется моторами М, которые управляются напряжением с выхода интегратора через коммутатор К. Коммутатор К подключает последовательно моторы отводов $\alpha_k$ к интегратору, причем работа моторов прекращается по достижении минимального напряжения на выходе интегратора.

В практических условиях зачастую ставится задача преобразования сигнала $g_1(z)$ в сигнал $g_2(z) = 1$. В этом случае можно воспользоваться либо общей схемой (рис. 2), либо схемой, приведенной на рис. 4.

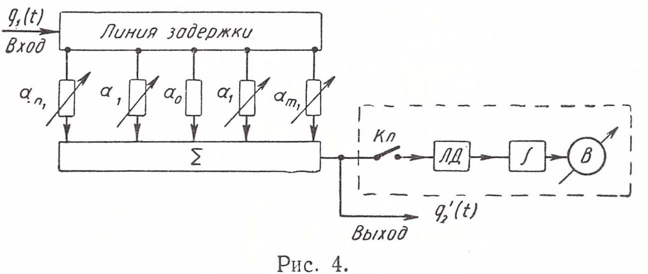



Рис. 4.

Ключ Кл. пропускает все дискретные значения $g_2'(k\Delta t) = c_k'k \ (k \neq 0)$ сигнала $g_2'(t)$, за исключением значения $g_2'(0) = c_0'$, так что на его выходе имеем

$$\varepsilon(z) = g_2'(z) - c_0'.$$

Суммарная абсолютная погрешность приобретает вид

$$\Delta' = \sum_{\substack{k=-(n_1+n) \\ k \neq 0}}^{m_1+m} |c_k'|.$$

Настройка по минимуму $\Delta'$ производится аналогично изложенному. Отвод $\alpha_0$ регулировке не подвергается, т. е. $\alpha_0 = \text{const}$. В результате такой настройки сигнал $g_1(z)$ преобразуется в сигнал $g_2'(z) = c_0'$, где величина $c_0'$ заранее неизвестна.

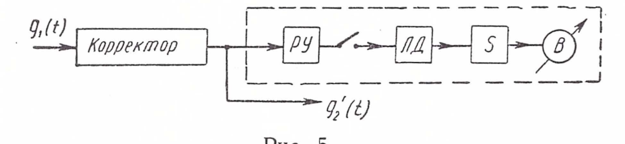



Рис. 5.

Однако требование $\Delta' = \min$ является недостаточным для практических целей, поскольку обычно ставится требование

$$\frac{c_0'}{\Delta'} = \max. \tag{7}$$

Настройка согласно общей схеме (рис. 2) удовлетворяет критерию (7), в то время как при настройке с использованием схемы рис. 4 это требование может не выполняться.

Сформулируем требование (7) в такой форме: минимизировать $\Delta'$ при условии $c_0' = \text{const}$ (т. е. величина $c_0'$ остается постоянной в процессе настройки).

Настройка корректора с учетом (7) осуществляется аналогично изложенному выше с той лишь разницей, что в схеме используется усилитель с автоматической регулировкой уровня (РУ) (рис. 5), который в процессе настройки изменяет свое усиление так, чтобы выполнялось условие $c_0' = \text{const}$.

Вывод: алгоритм настройки методом последовательной оптимизации гарантирует достижение минимально возможной погрешности, кроме того, техническая реализация алгоритма отличается простотой.

### Алгоритм настройки методом скорейшего спуска

Настройка корректора по минимуму погрешности $\Delta$ может быть осуществлена также на основе метода скорейшего спуска. Этот метод применительно к рассматриваемой задаче заключается в следующем.

Градиент функции $\Delta$ запишется так:

$$\overline{\nabla}\Delta = \sum_{k=-n_1}^{m_1} \frac{d\Delta}{d\alpha_k} \overline{\alpha}_k = \sum_{k=-n_1}^{m_1} \alpha_k \overline{\alpha}_k,$$

где $\overline{\alpha}_k$ — единичный вектор в направлении координаты $\alpha_k$; $\alpha_k$ — компонента градиента:

$$\lambda_k = \frac{d\Delta}{d\alpha_k}.$$

Запишем функцию погрешности в виде

$$\Delta = \sum_{k=-(n_1+n)}^{m_1+m} (c_k' - c_k)\,\mathrm{sgn}\,(c_k' - c_k) =$$

$$= \sum_{k=-(n_1+n)}^{m_1+m} \left( \sum_{i=-n_1}^{m_1} a_{k-i}\alpha_i - c_k \right) \mathrm{sgn}\,(c_k' - c_k),$$

где

$$\mathrm{sgn}\,(c_k' - c_k) = \begin{cases} +1, & c_k' - c_k \geqslant 0; \\ -1, & c_k' - c_k < 0. \end{cases}$$

Компоненту $\lambda_i$ можно выразить так:

$$\lambda_i = \sum_{k=-n_1}^{m_1} a_{k-i}\,\mathrm{sgn}\,(c_k' - c_k).$$

Градиент $\overline{\nabla}\Delta$ указывает направление и скорость быстрейшего роста функции $\Delta$. Вектор, противоположный градиенту по знаку, указывает направление быстрейшего убывания погрешности $\Delta$.

Обозначим вектор, описывающий изменения коэффициентов $\alpha_k$ во времени, через

$$\overline{A} = \sum_{k=-n_1}^{m_1} \frac{d\alpha_k}{dt}\overline{\alpha}_k,$$

где $\frac{d\alpha_k}{dt}$ — скорость регулировки отвода $\alpha_k$. Если изменять коэффициенты $\alpha_k$ так, чтобы выполнялось условие

$$K\overline{A} = -\overline{\nabla}\Delta \qquad (8)$$

($K$ — некоторая постоянная), то мы будем перемещаться по поверхности $\Delta$ кратчайшим путем по направлению к точке $\Delta_{\text{мин}}$ и достигнем $\Delta_{\text{мин}}$ в кратчайший отрезок времени, в какой бы исходной точке мы ни находились.

Согласно условию (8), скорость изменения коэффициентов $\alpha_k$ должна быть прямо пропорциональной величине компоненты $\lambda_k$

$$K\frac{d\alpha_k}{dt} = \lambda_k.$$

На рис. 8, *а* изображена блок-схема корректора с автоматической настройкой по данному методу.

Усилитель-ограничитель (УО) преобразует поступающий на его вход дискретный сигнал погрешности

$$\varepsilon(z) = \sum_{k=-(n_1+n)}^{m_1+m} (c'_k - c_k) z^k \text{ в сигнал } \varepsilon_1(z) =$$

$$= \sum_{k=-(n_1+n)}^{m_1+m} z^k \operatorname{sgn}(c'_k - c_k),$$

Рис. 6.

представляющий собой последовательность импульсов одинаковой амплитуды, полярность которых совпадает с полярностью (т. е. со знаком) погрешности $(c'_k - c_k)$ (рис. 8, *б* и *в*).

Сигнал $\varepsilon_1(z)$ подается на вспомогательный корректор с коэффициентом передачи

$$K_1(z) = \sum_{k=-n_1}^{m_1} a_{-k} z^k.$$

На выходе такого корректора возникает сигнал

$$\bar{g}_2(z) = K_1(z)\,\varepsilon_1(z) = \sum_{k=-2n_1+n}^{2m_1+m} \lambda_k z^k,$$

дискретные значения которого совпадают по величине с $\lambda_k$. В дальнейшем используется лишь $n_1 + m_1 + 1$ значений $\lambda_k$ $(-n_1 \leqslant k \leqslant m_1)$. В качестве вспомогательного корректора можно использовать два однополярных двоичных регистра сдвига либо один двухполярный регистр.

Коммутатор К распределяет $\lambda_k$ по $n_1 + m_1 + 1$ выходам, которые одновременно управляют работой $n_1 + m_1 + 1$ моторов отводов $\alpha_k$ $(-n_1 \leqslant k \leqslant m_1)$. Скорость вращения моторов пропорциональна величине управляющего напряжения $|\lambda_k|$, а направление вращения—противоположно знаку $\lambda_k$.

В целом настройка осуществляется в такой последовательности. Исходное состояние: устанавливаем коэффициенты передачи по отводам вспомогательного корректора равными $a_{-k}$ $(\alpha_k = a_{-k})$. Включаем одновременно все моторы, после чего настройка производится автоматически до тех пор, пока погрешность достигнет минимально возможного значения. На этом настройка прекращается.

Укажем, что алгоритм настройки корректора по методу скорейшего спуска для сигнала $g_2(z) = 1$ подробно рассмотрен в работе [3].

## Обобщение алгоритмов для случая взвешенной погрешности

Полученный результат обобщим на случай взвешенной (абсолютной) погрешности

$$\Delta_1 = \sum_{k=-(n_1+n)}^{m_1+m} p_k (c'_k - c_k),$$

где $p_k$ — дискретный вес:

$$\{p_k\} = p_{-(n_1+n)}, \ldots, p_{-1}, p_0, p_1, \ldots, p_{(m_1+m)}.$$

Введение дискретной весовой функции $\{p_k\}$ не нарушает выпуклости функции погрешности $\Delta_1$. Поэтому изложенные выше алгоритмы настройки корректора по методу последовательных приближений либо по методу скорейшего спуска в принципе полностью применимы и для случая оптимизации (минимизации) взвешенной погрешности $\Delta_1$.

## Примеры применения алгоритмов

Пример 1. Пусть $g_1(z) = -0{,}5\,z^{-1} + 1 + 0{,}6\,z$ (рис. 7, *а*), т. е. $a_{-1} = -0{,}5$; $a_0 = 1$; $a_1 = 0{,}6$;

$g_2(z) = A$ ($A$ — произвольная постоянная).

Для преобразования $g_1(z)$ в $g_2(z)$ используется корректор с коэффициентом передачи

$$K(z) = \alpha_{-1}z^{-1} + 1 + \alpha_1 z.$$

При подаче на вход корректора сигнала $g_1(z)$ на выходе получим сигнал

$$g_2'(z) = g_1(z)K(z) = \sum_{k=-2}^{2} c_k' z^k,$$

где

$$c_{-2}' = -0{,}5\alpha_{-1}; \quad c_{-1}' = \alpha_{-1} - 0{,}5;$$

$$c_0' = 0{,}6\alpha_{-1} + 1 - 0{,}5\alpha_1; \quad c_1' = \alpha_1 + 0{,}6; \quad c_2' = 0{,}6\alpha_1.$$

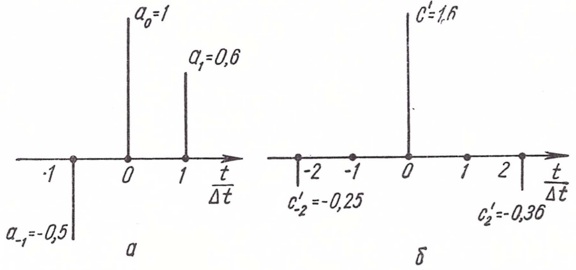



Рис. 7.

Погрешность $\Delta'$ имеет вид

$$\Delta' = \sum_{\substack{k=-2\\k\neq 0}}^{2} |c_k'| = |0{,}5\alpha_{-1}| + |\alpha_{-1} - 0{,}5| + |0{,}6 + \alpha_1| + |0{,}6\alpha_1|. \quad (9)$$

Необходимо настроить корректор так, чтобы погрешность $\Delta'$ приняла минимально возможное значение $\Delta'_{\text{мин}}$.

Осуществим настройку методом последовательных приближений. Для данного примера настройка заключается в подборе коэффициентов $\alpha_1$ и $\alpha_{-1}$ ($\alpha_0 = 1 = \text{const}$).

1. Исходное состояние: $\alpha_{-1} = 0$, что дает

$$\Delta' = L_1^{(1)} = 0{,}5 + |0{,}6 + \alpha_1| + |0{,}6\alpha_1|.$$

Вращая регулятор $\alpha_1$, добиваемся минимума погрешности $\Delta' = L_1^{(1)}$. Определим расчетным путем значение $\alpha_1^{(1)}$, минимизирующее $L_1^{(1)}$.

Изломы функции $L_1^{(1)}$ находятся в точках $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_1 = -0{,}6$. Вычисляя величину $L_1^{(1)}$ в точках излома, убеждаемся, что минимум $L_1^{(1)}$ имеет место при $\alpha_1^{(1)} = -0{,}6$, что и является оптимальным значением коэффициента $\alpha_1$.

2. Настраиваем отвод $\alpha_{-1}$. Подставляя значение $\alpha_1^{(1)} = -0,6$ в равенство (9), получим

$$\Delta' = L_{-1}^{(1)} = |0,5\alpha_1| + |\alpha_{-1} - 0,5| + 0,36.$$

Функция $L_{-1}^{(1)}$ имеет изломы при $\alpha_{-1} = 0$ и $\alpha_{-1} = 0,5$. Вычисляя величину $L_{-1}^{(1)}$ в точках излома, находим, что значение $\alpha_{-1}^{(1)} = 0,5$ соответствует минимуму $L_{-1}^{(1)}$.

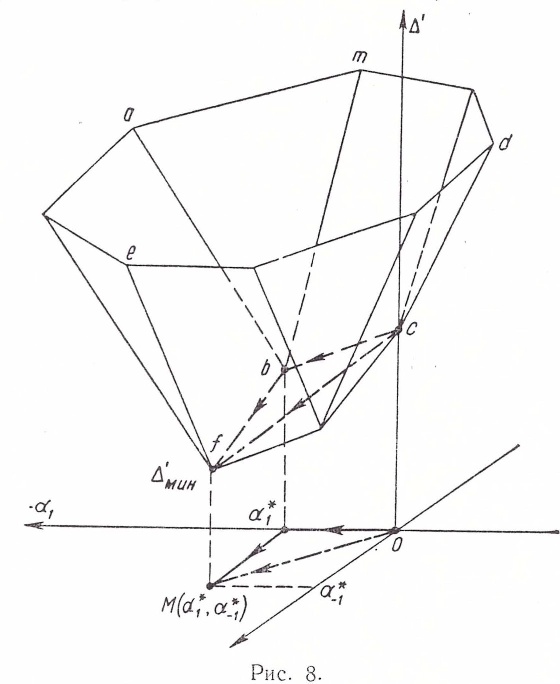



Рис. 8.

Осуществляя повторную регулировку отводов $\alpha_1$ и $\alpha_{-1}$, убеждаемся, что дальнейшая настройка не приводит к уменьшению погрешности $\Delta'$. Это свидетельствует о том, что найденные значения $\alpha_{-1}^{(1)}$ и $\alpha_1^{(1)}$ являются оптимальными

$$\overset{*}{\alpha}_1 = -0,6; \quad \overset{*}{\alpha}_{-1} = 0,5.$$

Минимальное значение погрешности $\Delta'_{\text{мин}}$ равно 0,61. Сигнал $g_2^1(z)$ имеет вид (рис. 7, *б*).

$$g_2'(z) = -0,25z^{-2} + 1,6 - 0,36z^2.$$

Значение $A$ равно 1,6.

Рассмотрим процесс настройки корректора графически. Функция $\Delta'$ изображена на рис. 8.

1. Начальное состояние $\alpha_1 = 0$, $\alpha_{-1} = 0$ соответствует точке $c$. При настройке отвода $\alpha_1$ мы движемся по кривой $L_1^{(1)}$ (кривая $abcd$), отыскивая ее минимум, который имеет место в точке $b$. Проекция точки $b$ на ось $\alpha_1$ дает точку $\alpha_1^{(1)} = \overset{*}{\alpha}_1$.

2. Настраиваем отвод $\alpha_{-1}$. При этом мы движемся по кривой $L_{-1}^{(1)}$ (кривая $efbm$), отыскивая ее минимум. Минимум $L_{-1}^{(1)}$ находится в точке $f$. Проекция $f$ на координатную плоскость $\alpha_1\alpha_{-1}$ дает точку $M$ с координатами $\overset{*}{\alpha}_1$ и $\overset{*}{\alpha}_{-1}$. Дальнейшая регулировка отводов $\alpha_1$ и $\alpha_{-1}$ не приводит к уменьшению погрешности $\Delta'$, так как точка $f$ является абсолютным минимумом $\Delta'_{\text{мин}}$ функции $\Delta'$.

Допустим теперь, что настройка производится по методу скорейшего спуска. В этом случае движение из начальной точки $c$ в точку $f$ $(\Delta')$ происходит по кратчайшему пути — прямой $cf$ (штрихпунктирная линия рис. 8).

Данный пример наглядно иллюстрирует выпуклость функции погрешности $\Delta'$, поэтому метод последовательных приближений и метод скорейшего спуска могут быть использованы для оптимальной настройки корректора.

Пример. 2. Даны сигналы

$$g_1(z) = -z^{-1} + 1 + z, \quad (a_{-1} = -1, \quad a_0 = a_1 = 1);$$

$g_2(z) = A$ ($A$ — произвольная постоянная). Необходимо настроить корректор с коэффициентом передачи

$$K(z) = \alpha_{-1} z^{-1} + 1 + \alpha_1 z$$

так, чтобы погрешность

$$\Delta' = \sum_{\substack{k=2 \\ k \neq 0}}^{2} |c'_k| = |\alpha_{-1}| + |\alpha_{-1} - 1| + |\alpha_1 + 1| + |\alpha_2|$$

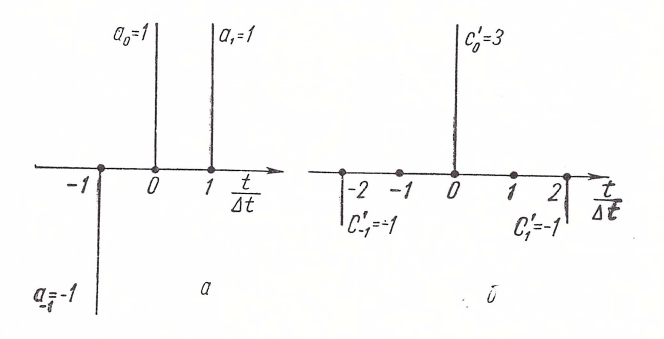
приняла минимальное возможное значение. В выражении погрешности $\Delta'$ не учитывается член

$$c'_0 = |\alpha_{-1} - \alpha_1 + 1|.$$

График функции $\Delta'$ приведен на рис. 9, *в*. Как следует из этого рисунка, $\Delta'$ принимает минимальное значение, равное 2, не в одной точке, а в целой области, ограниченной кривой 0, — 1, $M$, 1.

При настройке корректора по методу последовательной оптимизации либо по методу скорейшего спуска мы можем получить любые значения $\alpha_1$ и $\alpha_{-1}$, лежащие в пределах $-1 \leqslant \alpha_1 \leqslant 0$, $0 \leqslant \alpha_{-1} \leqslant 1$, т. е. настройка может прекратиться в любой точке прямоугольника $abcd$. Это происходит потому, что мы не учитываем значение $c'_0$, так как отвод $\alpha_0$ не регулируется. Однако мы заинтересованы не только в том, чтобы получить минимальное значение $\Delta'$, но также

в том, чтобы выполнялось соотношение $\frac{c_0'}{\Delta'} = \max$. В связи с этим настройку следует производить так, чтобы для данного значения погрешности $\Delta'$ величина $c_0'$ была максимальной. Максимальному



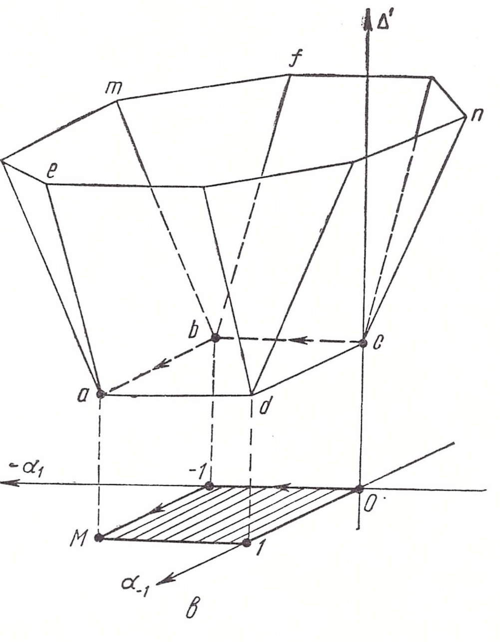




Рис. 9.

значению $c_0'$ в пределах прямоугольника $M$, —1, 0, 1 соответствует точка $M$ с координатами $\alpha_{-1} = 1$, $\alpha_1 = 1$. В этой точке $c_0' = 3$. Если стремиться не только уменьшить $\Delta'$, но и увеличить $c_0'$, то настройка корректора, например, по методу последовательных приближений,

прекратится в точке $a$, в которой $\Delta' = \min$, $c_0' = \max$. Сигнал $g_2'(z)$ равен

$$g_2'(z) = -z^{-1}.$$

Сигналы $g_1(z)$ и $g_2'(z)$ приведены на рис. 9, *а*, *б*.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Linke I. M. A variable time equalizer for videofrequency waveform correction Proc. IEE, т. 99, III a, № 18, 1952.
2. Кисель В. А.— В кн.: Математическое моделирование и теория электрических цепей. Вып IV. «Наукова думка» К., 1966.
3. Lucky R. M.— BSTY, 1965, 4.



Рассмотрено на семинаре
24 июня 1966 г.

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ ЧАСТОТНОГО УПРАВЛЕНИЯ АСИНХРОННЫМИ ДВИГАТЕЛЯМИ

А. П. ТИПИКИН

В настоящее время проектируются системы частотного управления тяговыми асинхронными двигателями для перспективных локомотивов. Разрабатываются два основных варианта указанных систем: при переменной и постоянной скорости первичного двигателя. В первом варианте системы (рис. 1, *а*) в качестве первичного двигателя используется специальный газотурбинный двигатель (ГТД, рис. 1, *а*), работающий в широком диапазоне скоростей и обеспечивающий тяговую характеристику приводной системы. Частота синхронного генератора (СГ) при разгоне локомотива изменяется в широком диапазоне, что отвечает требованиям частотного управления асинхронными двигателями (АД). Регулятор возбуждения СГ предусмотрен для поддержания оптимального закона частотного управления, предложенного М. П. Костенко

$$\frac{U_г}{\omega_г} = \mathrm{const},$$

где $U_г$, $\omega_г$ — соответственно напряжение и угловая частота синхронного двигателя.

Во втором варианте системы (рис. 1, *б*) предполагается использовать первичный двигатель, работающий в узком диапазоне экономичных скоростей (дизель). Тяговая характеристика приводной системы обеспечивается применением обратной связи по мощности в регуляторе возбуждения СГ. Регулирование скорости тяговых АД осуществляется системой частотного управления с промежуточным звеном постоянного тока, включающей выпрямитель (В) и автономный инвертор (И). Оптимальный закон частотного управления поддерживается регулятором частоты инвертора. Измерительный элемент (Д) регулятора частоты подключается на выходе инвертора.

Известная сложность и нелинейность дифференциальных уравнений машин переменного тока при переменной частоте затрудняют

аналитическое исследование статических и динамических характеристик систем частотного управления. При решении данной задачи на аналоговых вычислительных машинах (АВМ) можно с достаточной точностью определить основные характеристики указанных систем

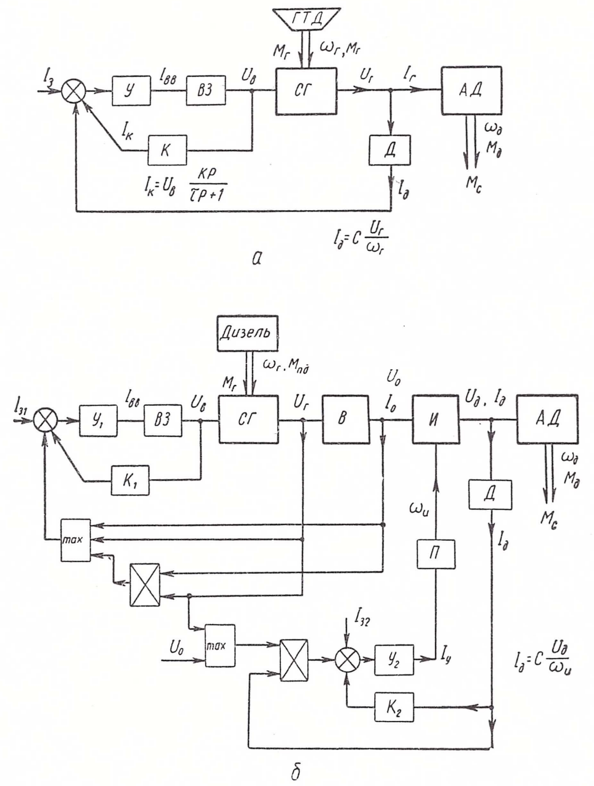



Рис. 1. Блок-схемы систем частотного управления тяговыми асинхронными двигателями локомотивов.

и получить исходные данные для проектирования электрооборудования.

Методы математического моделирования элементов регуляторов рассматриваемых систем хорошо разработаны. Способы моделирования на АВМ силовых элементов, т. е. синхронного генератора при переменной частоте, каскада синхронный генератор — выпрямитель, асинхронного двигателя при переменной частоте и каскада инвертор — асинхронный двигатель разработаны недостаточно. Исследование переходных процессов в машинах переменного тока и вентильно-машинных каскадах производится двумя этапами: определение электромагнитных и электромеханических переходных процессов.

Электромагнитные переходные процессы возникают при внезапных изменениях режима работы и при коммутации вентилей и являются кратковременными. При их исследовании обычно пренебрегают изменением скоростей роторов машин за время переходного процесса [1—3].

При определении электромеханических переходных процессов пренебрегают наиболее быстротечными электромагнитными процессами, сравнимыми по длительности с периодом основной гармоники тока статора, носящими характер пульсаций и мало влияющими на динамику автоматической системы в целом [1, 2]. Указанное допущение позволяет значительно сократить порядок дифференциальных уравнений системы, но в каждом конкретном случае требует проверки путем сравнения реальных процессов и результатов решения упрощенных уравнений.

Электромеханические переходные процессы и статические характеристики синхронного генератора изучаются на его упрощенной математической модели. При моделировании генератора приняты следующие основные допущения, подтвержденные практикой [2,3]:

1) распределение магнитного поля фазных обмоток вдоль окружности статора и ротора принято синусоидальным; 2) не учитываются потери в стали; 3) электромагнитные переходные процессы в статорных контурах не учитываются в связи с их кратковременностью по сравнению с переходными процессами в контуре возбуждения СГ и цепях регулятора. Синхронный генератор моделируется по уравнениям Горева — Парка с учетом насыщения главной магнитной цепи [1]. Насыщение учитывается приближенно только по продольной оси в соответствии с характеристикой холостого хода [3]. Данный приближенный учет насыщения не проверен в случае работы генератора с изменяющейся в широком диапазоне частотой. Для оценки погрешности в данном случае производилось сравнение динамических и статических характеристик, полученных в результате решения на ЭЦВМ уравнений генератора с упрощенным учетом насыщения по одной оси $d$ и более точным учетом кривой намагничивания как функции модуля вектора намагничивающего тока. Расчеты произведены для наиболее характерных режимов работы генератора при переменной частоте и показывают, что упрощенный учет насыщения вносит погрешность, не превышающую 10%.

На основании указанных допущений получены следующие уравнения синхронного генератора при переменной частоте:

$$U_{\text{в}} = p\psi_d + (r_{\text{в}} + px_{\sigma\text{в}})\,[S(\psi_d) - I_d],$$

$$\psi_{\text{c}d} = \psi_d + x_{\sigma\text{c}} I_d,$$

$$E_q = \omega_{\text{г}} \psi_{\text{c}d},$$

$$E_d = x_{aq} \omega_{\text{г}} I_q,$$

$$U_d = E_d - r_{\text{c}} I_d,$$

$$U_q = E_q - r_c I_q,$$

$$M_г = \frac{3}{2} I_q (\psi_d - x_{aq} I_d),$$

$$M_{пд} - M_г = \tau_м p \omega_г,$$

где $\psi_d$ — проекция на продольную ось потока в зазоре генератора; $\psi_{cd}$, $\psi_{cq}$, $I_d$, $I_q$ — проекция векторов потокосцепления и тока статора на продольную $d$ и поперечную $q$ оси машины; $E_q$, $E_d$, $U_q$, $U_d$ — проекции векторов э. д. с. и напряжения статора на оси $q$

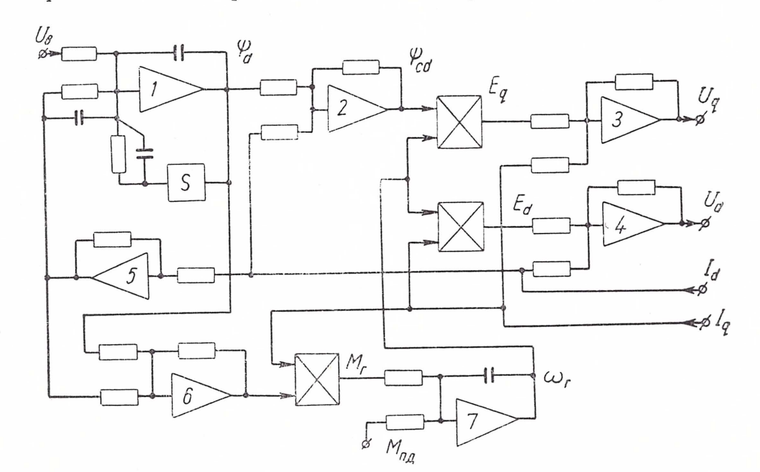



Рис. 2. Схема электронной модели синхронного генератора.

и $d$; $M_г$ — момент синхронного генератора; $M_{пд}$ — момент первичного двигателя; $r_c$ — активное сопротивление фазы статора; $\tau_м$ — механическая постоянная времени; $U_в$ — напряжение на выходе возбудителя; $x_{aq}$, $x_{ad}$ — коэффициенты взаимной индукции ротора и статора.

По данным уравнениям составлена структурная схема модели СГ на АВМ (рис. 2).

Математическое моделирование переходных процессов в каскаде синхронный генератор — выпрямитель осуществляется при следующих допущениях: 1) не учитываются электромагнитные переходные процессы, вызываемые внезапным изменением режима работы, т. е. переходные процессы в статорных контурах; 2) пренебрегается высшими гармониками на стороне переменного тока, а на стороне постоянного тока рассматриваются средние значения за период повторяемости. Статические характеристики каскада в значительной степени определяются электромагнитными процессами, происходящими в статорных контурах генератора при коммутации вентилей [5] и не учтенными в данном случае при моделировании переходных процессов. Уравнения статических характеристик получаются

в результате теоретического анализа электромагнитных процессов каскада [2, 5], а затем вводятся при моделировании. Для учета реакции якоря генератора предложен способ разложения модуля вектора основной гармоники тока статора, пропорционального выпрямленному току, на проекции на продольную и поперечную оси машины.

На основании указанных допущений и соответствующего теоретического анализа получены следующие дифференциальные уравнения каскада синхронный генератор — выпрямитель при переменной частоте:

$$U_в = p\psi_d + (r_в + px_{\sigma в})\,[S(\psi_d) - I_d],$$

$$\psi_{эd} = \psi_d - I_d\,(x_к - x_{\sigma c}),$$

$$\psi_{эd}^2 + (x_q - x_к)^2 I_q^2 = \frac{4}{3}\psi_{rm}^2 + \frac{\pi^2}{9}x_к^2 I_{1m}^2 -$$

$$-\left[OV\left(\frac{\psi_{rm}}{\sqrt{3}} - \frac{\pi x_к I_{1m}}{2\sqrt{3}}\right)\right]^2 - \left[OV\left(\frac{\pi x_к I_{1m}}{6} - \psi_{rm}\right)\right]^2,$$

$$I_{1m}\psi_{rm} = I_q\,(\psi_d - x_{aq} I_d),$$

$$U_0 = \omega_г \psi_{rm} - \frac{\pi^2}{12} r_c I_{1m},$$

$$M_г = \frac{3}{2} I_{1m}\psi_{rm},$$

$$M_{пд} - M_г = \tau_м p \omega_г,$$

где $\psi_{эd}$ — проекция на ось $d$ вектора эквивалентного потока статора генератора при работе на выпрямитель; $\psi_{rm}$ — амплитудное значение потокосцепления статора генератора, совпадающего по фазе с основной гармоникой тока статора; $I_{1m}$ — амплитудное значение основной гармоники тока статора; $p$ — символ дифференцирования по времени; $r_в$ — активное сопротивление цепи возбуждения генератора; $x_{\sigma в}$, $x_{\sigma c}$ — индуктивные сопротивления рассеяния обмотки возбуждения генератора и фазы статора; $x_q$ — синхронное индуктивное сопротивление генератора по поперечной оси; $x_k$ — эквивалентное индуктивное сопротивление генератора при работе на выпрямитель; $V$ — обозначение логической операции дизъюнкции (выбор максимальной из двух величин); $S$ — условное обозначение функционального преобразователя, учитывающего насыщение главной магнитной цепи СГ.

Электронная модель, составленная по данным уравнениям, приведена на рис. 3. Для проверки точности воспроизведения статических и динамических характеристик сравниваются экспериментальные данные, полученные на макете каскада, с результатами моделирования этого макета на АВМ. Погрешность воспроизведения характеристик на модели не превышает 10%. В отличие от известных моделей преобразователей переменного тока в постоянный [2] дан-

ная модель позволяет учесть ряд особенностей автономной установки: регулирование напряжения возбуждения и частоты, влияние реакции якоря, работа выпрямителя в глубоких режимах, близких к короткому замыканию.

При моделировании асинхронного двигателя приняты те же допущения, что и при моделировании синхронного генератора. Дифференциальные уравнения двигателя составляются по методу двух реакций в системе координат, вращающейся со скоростью, равной

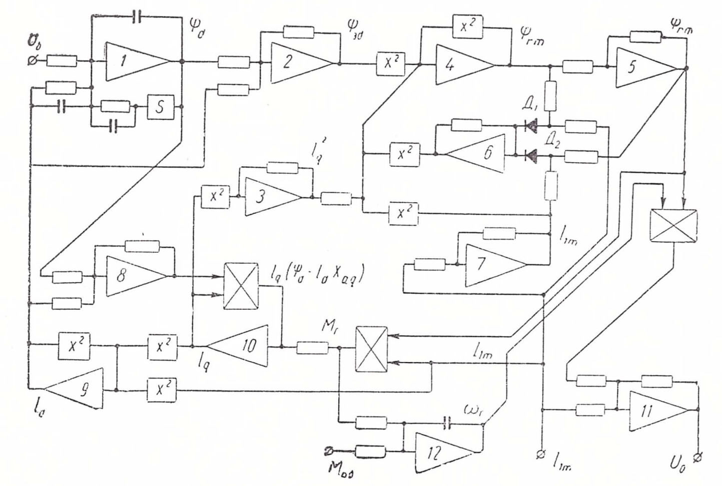


Рис. 3. Схема электронной модели каскада синхронный генератор — выпрямитель.

угловой частоте тока статора. Насыщение магнитной цепи двигателя по путям рассеяния учитывается введением постоянных насыщенных значений индуктивных сопротивлений рассеяния. Насыщение главной магнитной цепи не учитывается. При этом характеристики и диаграмма тока двигателя воспроизводятся с погрешностью, не превышающей 10% [4]. Дифференциальные уравнения асинхронного двигателя при переменной частоте:

$$U_d = \left(p + \frac{r_c}{x}\right)\psi_{cd} - \frac{r_c}{x}\psi_{pd} - \omega\psi_{cq},$$

$$U_q = \left(p + \frac{r_c}{x}\right)\psi_{cq} - \frac{r_c}{x}\psi_{pq} + \omega\psi_{cd},$$

$$0 = \left(p + \frac{r_p}{x}\right)\psi_{pd} - \frac{r_p}{x}\psi_{cd} - \Delta\omega\psi_{pq},$$

$$0 = \left(p + \frac{r_p}{x}\right)\psi_{pq} - \frac{r_p}{x}\psi_{cq} + \Delta\omega\psi_{pd},$$

$$\sigma\psi_{cd} = \psi_{pd} + xI_d,$$

$$\sigma\psi_{cq} = \psi_{pq} + xI_q,$$
$$\Delta\omega = \omega - \omega_д,$$
$$M_д = \frac{3}{2}(\psi_{cd}I_q - \psi_{cq}I_d),$$
$$M_д - M_c = \tau_м p\omega_д,$$
$$I_{1m} = \sqrt{I_d^2 + I_q^2},$$
$$x = x_{\sigma p} + x_{\sigma c} + \frac{x_{\sigma p}x_{\sigma c}}{x_{ad}}$$
$$\sigma = 1 + \frac{x_{\sigma p}}{x_{ad}},$$

где $\psi_{p,d}$, $\psi_{p,q}$ — проекции вектора потокосцепления ротора на оси $d$, $q$; $r_p$ — активное сопротивление ротора; $x_{\sigma p}$ — индуктивное со-

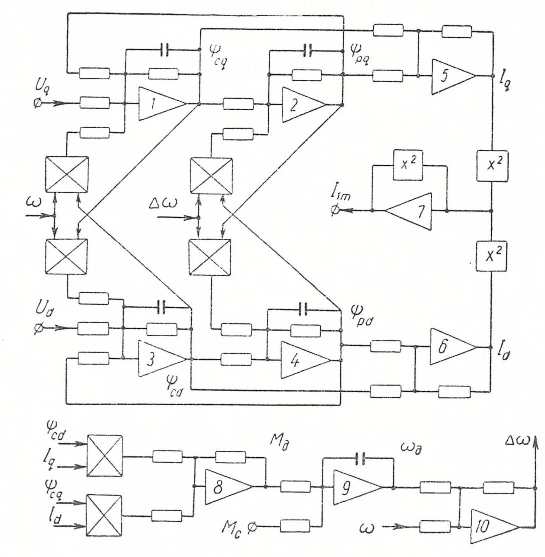



Рис. 4. Схема электронной модели асинхронного двигателя.

противление рассеяния ротора. Структурная схема модели асинхронного двигателя при переменной частоте приведена на рис. 4.

Электронная модель каскада инвертор — асинхронный двигатель построена при допущениях, аналогичных каскаду синхронный генератор — выпрямитель. Моделировался инвертор с отсекающими диодами и реактивным мостом, основным преимуществом которого является наличие специальных контуров перезаряда коммутирующих конденсаторов, минуя фазные обмотки двигателя. Напряжение на выходе инвертора не содержит гармоник, кратных трем, бла-

годаря чему с достаточной точностью можно исследовать характеристики двигателя, принимая во внимание только основные гармоники токов и напряжений [6]. Электромагнитные процессы в данном инверторе при коммутации вентилей кратковременны и не оказывают существенного влияния на характеристики системы. Инвертор по основным гармоникам описывается простыми линейными соотношениями, поэтому при моделировании данного каскада достаточно составить модель асинхронного двигателя.

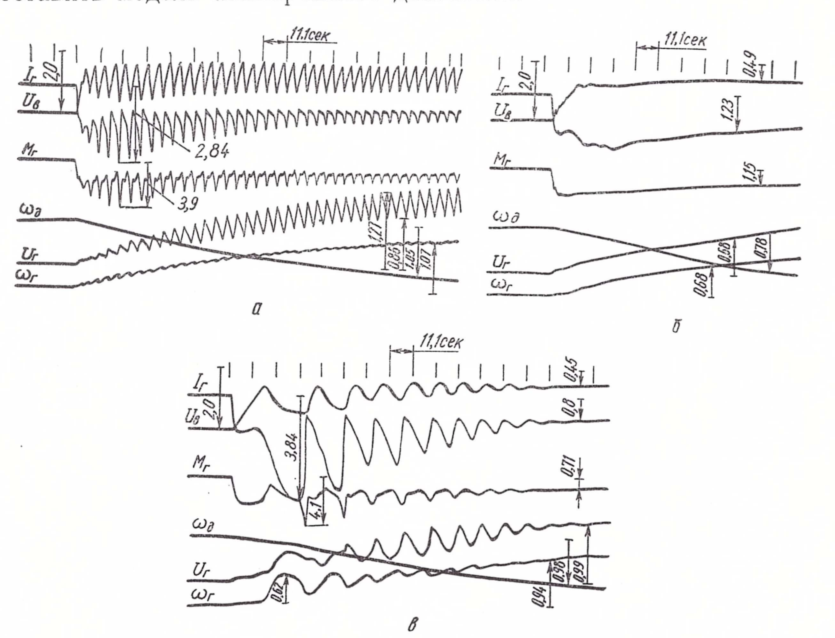



Рис. 5. Переходные процессы в системе частотного управления при разгоне локомотива.

Особенностью электронных моделей изучаемых систем переменного тока является наличие большого количества нелинейных решающих элементов: квадраторов и множителей (рис. 2—4). Точность нелинейных блоков, входящих в комплекты серийных АВМ, оказалась недостаточной для данной задачи, так как входные и выходные сигналы указанных блоков изменяются в широком диапазоне: 0,1—100 *в*. Точность, динамический диапазон выходного сигнала и рабочий диапазон частот нелинейных элементов были значительно повышены по сравнению с серийными применением принципа кусочно-нелинейной аппроксимации параболы на кремниевых диодах (без опорных источников напряжения) и термостатированием диодов. При построении множителя дополнительно повышена точность схем выделения модуля возводимых в квадрат сигналов применением в этих схемах кремниевых термостатированных диодов и специаль-

ных схем коррекции их характеристик, выполненных на кремниевых диодах и сопротивлениях. Сконструированные квадраторы и множители имеют относительную погрешность на более 0,1% и динамический диапазон выходного сигнала, равный 1000 (при мгновенной относительной погрешности, не превышающей 2%). Рабочий диапазон частот: 0—4000 *гц* при дополнительной динамической погрешности, не превышающей 1% от максимального значения выходного сигнала. При использовании построенных нелинейных блоков погрешность решения на АВМ уравнений силовых элементов систем частотного управления составила не более 5%. Погрешность проверялась сравнением характеристик силовых элементов, полученных на модели и в результате решения на ЭЦВМ.

Исследованы системы частотного управления двигателями газотурбовоза и тепловоза, находящиеся в стадии эскизного проектирования. Определены границы статической и динамической устойчивости систем, оптимальные типы гибких связей и их параметры. Даны рекомендации к техническому проектированию силовых элементов. Для исследуемых нелинейных систем характерным является потеря статической устойчивости при нерациональном выборе типов корректирующих элементов и их параметров. Так, например, на рис. 5, *в* показан аналогичный переходной процесс при разгоне локомотива в системе, составленной по блок-схеме (рис. 1, *а*). В этом случае разгон сопровождается опасными ударами тока генератора и моментов, достигающими четырехкратных значений по сравнению с номинальными значениями. При правильном выборе параметров корректирующего звена разгон локомотива осуществляется плавно (рис. 5, *б*). На осциллограмме рис. 5, *а* показаны переходные процессы в системе при отсутствии корректирующих звеньев.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Грузов Л. Н. Методы математического исследования электрических машин, ГЭИ, 1953.
2. Богачков М. Л., Новицкий В. Г.— В кн.: Электроэнергетика. «Наука», М., 1964.
3. Горбунова А. Н., Портной М. Г.— Труды ВНИИЭ. Вып. 15, 1963.
4. Петров Г. Н.— Электричество, 1948, 12.
5. Шехтман М. Г.— Труды Ленинградского индустриального института, 1940, 3.
6. Хасаев О. И.— Электричество, 1961, 9.



*Доложено на семинаре*
*18 февраля 1966 г.*

# МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ И ИССЛЕДОВАНИЕ МНОГОСВЯЗНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ НАГРУЖЕНИЕМ СЛОЖНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

С. К. ГАНИЕВ, К. Д. ЖУК, В. Г. ТАЦИЙ

1. Проектирование и ввод в эксплуатацию нового типа самолета связаны с проведением большого комплекса стендовых испытаний для определения его действительной прочности.

Самым ответственным видом испытаний являются натурные статические и повторно-статические испытания, т. е. испытания законченной конструкции планера самолета или отдельных крупных его агрегатов, таких как крыло, фюзеляж, оперение и т. п. При натурных испытаниях необходимо с максимально возможной точностью воспроизводить реальные эксплуатационные нагрузки, определяемые при продувках модели и в процессе летних испытаний аналогичных самолетных конструкций. Ввиду большой сложности и разнообразия эксплуатационных нагрузок натурные прочностные испытания представляют собой достаточно сложный процесс, поэтому их организация, методика проведения и проектирование испытательного оборудования превращаются в самостоятельную проблему. Трудности, связанные с созданием испытательного оборудования, вытекают из некоторых характерных особенностей авиационных конструкций и их эксплуатационных нагрузок, а именно: в конструкциях возникают значительные деформации, а нагрузки в большинстве являются распределенными и имеют широкий амплитудный и частотный диапазон. Эти особенности предъявляют специфические требования к испытательному оборудованию. Так, значительные деформации конструкции заставляют применять силовозбудитель с большим динамическим ходом (гидравлические силовые цилиндры). Имитация же распределенной нагрузки требует одновременного действия большого числа силовозбудителей, что приводит к необходимости создания довольно сложных систем автоматического управления совместной работой силовозбудителей, которые оказываются взаимосвязанными через испытуемую конструкцию.

Система управления должна обеспечивать синхронное движение штоков силовозбудителей, а сами воздействия на конструкцию должны быть автономными по отношению к заданным нагрузкам во всех точках.

Под синхронной следует понимать такую работу силовозбудителей, когда в каждый момент времени между равнодействующими сохраняются определенные соотношения, вытекающие из эпюры распределенной нагрузки. Автономность воздействия силовозбу-

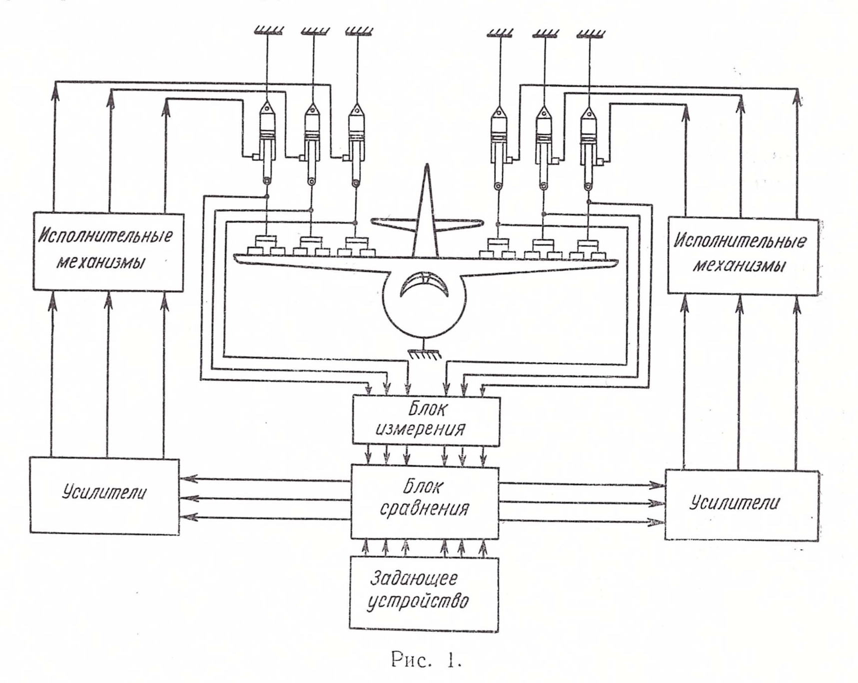



Рис. 1.

дителей заключается в том, что система управления $i$-го силовозбудителя должна вызывать изменение только $i$-го усилия, несмотря на то, что силовозбудители связаны между собой через испытуемую конструкцию. Отсутствие автономности может вызвать перераспределение напряжений в конструкции и условия испытаний будут сильно отличаться от условий эксплуатации.

Следовательно, при проектировании оборудования для натурных прочностных испытаний авиационных конструкций возникает задача синтеза многосвязных систем автоматического управления (АМС) с указанными специфическими особенностями и требованиями.

В настоящее время известна установка для проведения натурных испытаний [1], представляющая собой совокупность силовозбудителей, каждый из которых имеет собственную систему автоматического управления (рис. 1). Для достижения синхронности

движения штоков силовозбудителей все системы управления работают от одного программного задающего устройства. Однако в этой установке автономность воздействия силовозбудителей обеспечивается для довольно узкой области экспериментов. Качество автономности может быть достигнуто за счет бесконечного увеличения коэффициентов усиления каждого канала управления [2]. Но, как будет показано ниже, при достаточно большом числе каналов управления и широком диапазоне изменений коэффициентов взаимного влияния каналов нагружения потребуются столь большие значения коэффициентов усиления, которые приведут к тому, что системы управления в каналах с большой жесткостью конструкции могут выйти за границы устойчивости.

В настоящей статье рассматривается решение комплексной задачи автономного управления с одновременным обеспечением синхронности работы силовозбудителей.

Так как объект управления (испытуемая конструкция) не поддается конструктивному расчленению, предлагается применение в многосвязной системе управляющей модели [3].

В рассматриваемой задаче синтеза синхронно-автономной системы используется метод обратных операторов, теоретические вопросы которого освещены в работах Г. Е. Пухова [4, 5].

2. Пусть распределенная нагрузка сведена к $n$ равнодействующим. В процессе испытаний конструкция работает в области упругих деформаций, следовательно, изменения формы пропорциональны внешним силам и деформации являются линейными функциями внешних сил. Применяя принцип суперпозиции, можем выразить зависимость линейных перемещений $Y_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) от приложенных усилий $P_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) в виде системы уравнений:

$$\begin{aligned} Y_1 &= a_{11}P_1 + a_{12}P_2 + \ldots + a_{1i}P_i + \ldots + a_{1n}P_n, \\ Y_2 &= a_{21}P_1 + a_{22}P_2 + \ldots + a_{2i}P_i + \ldots + a_{2n}P_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y_i &= a_{i1}P_1 + a_{i2}P_2 + \ldots + a_{ii}P_i + \ldots + a_{in}P_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y_n &= a_{n1}P_1 + a_{n2}P_2 + \ldots + a_{ni}P_i + \ldots + a_{nn}P_n, \end{aligned} \qquad (1)$$

где $a_{ii}$, $a_{ij}$ — коэффициенты влияния.

Действительно, $a_{ij}$ представляет собой перемещение точки $i$, вызванное единичной силой $P_j = 1$, действующей в точке $j$. Величины $a_{ii}$ и $a_{ij}$ называют соответственно главными и побочными податливостями.

Систему (1) можно представить в виде:

$$P_1 + \frac{1}{a_{11}} a_{12}P_2 + \ldots + \frac{1}{a_{11}} a_{1i}P_i + \ldots + \frac{1}{a_{11}} a_{1n}P_n = \frac{1}{a_{11}} Y_1,$$

$$\frac{1}{a_{22}} a_{21}P_1 + P_2 + \ldots + \frac{1}{a_{22}} a_{2i}P_i +$$

$$+\ldots+\frac{1}{a_{22}}a_{2n}P_n=\frac{1}{a_{22}}Y_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2)$$

$$\frac{1}{a_{ii}}a_{i1}P_1+\frac{1}{a_{ii}}a_{i2}P_2+\ldots+P_i+\ldots+\frac{1}{a_{ii}}a_{in}P_n=\frac{1}{a_{ii}}Y_i,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{a_{nn}}a_{n1}P_1+\frac{1}{a_{nn}}a_{n2}P_2+\ldots+\frac{1}{a_{nn}}a_{ni}P_i+\ldots+P_n=\frac{1}{a_{nn}}Y_n,$$

или в матричной форме

$$[E+W\overline{M}]\,P=WY, \qquad (3)$$

где матрицы $W$ и $\overline{M}$ имеют вид

$$W=\left\|\begin{matrix}\frac{1}{a_{11}} & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \ldots & 0 & \ldots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{a_{ii}} & \ldots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & \frac{1}{a_{nn}}\end{matrix}\right\|;$$

$$\overline{M}=\left\|\begin{matrix}0 & a_{12} & \ldots & a_{1i} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & 0 & \ldots & a_{2i} & \ldots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & 0 & \ldots & a_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{ni} & \ldots & 0\end{matrix}\right\|;$$

вектор-столбцы $P$ и $Y$:

$$P=\left\|\begin{matrix}P_1\\ P_2\\ \vdots\\ P_i\\ \vdots\\ P_n\end{matrix}\right\|; \qquad Y=\left\|\begin{matrix}Y_1\\ Y_2\\ \vdots\\ Y_i\\ \vdots\\ Y_n\end{matrix}\right\|.$$

Так как в системах отдельных каналов нагружения (рис. 1) выходными величинами являются значения усилий $P_i$, а регулирование осуществляется за счет перемещения $Y_i$ штоков силовозбудителей, то уравнение объекта (испытуемой конструкции) получим

из выражения (3), разрешив его относительно вектор-столбца выходных переменных $P$:

$$P = [E + W\overline{M}]^{-1} WY = HY, \qquad (4)$$

где $H = [E + W\overline{M}]^{-1} W$ — оператор объекта.

Обратный ему оператор имеет вид

$$H^{-1} = W^{-1} [E + W\overline{M}].$$

Как видно из выражения оператора объекта, испытуемая конструкция относится к классу объектов с $V$-канонической структу-

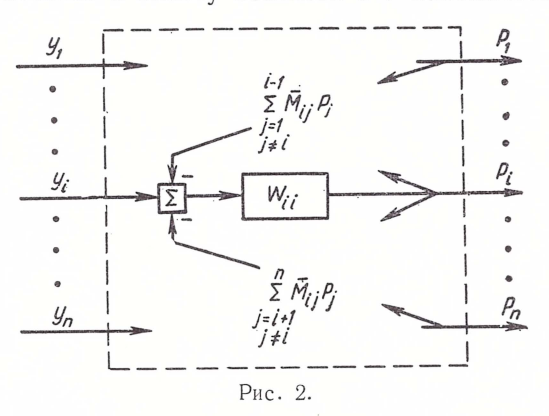



Рис. 2.

рой [6]. Объект с $V$-канонической структурой — это такой объект, где существуют только главные связи $W_{ii}$ и обратные взаимосвязи $\overline{M}_{ij}$.

Представление модели испытуемой конструкции в виде $V$-канонической структуры (рис. 2), во-первых, полностью соответствует физике процесса, происходящего в конструкции при нагружении, во-вторых, как было показано в работе [3], является удобным построением при синтезе многосвязной автономной системы методом обратных операторов.

Применяя этот метод в построении многосвязной системы управления нагружением, удается решить поставленную выше задачу синтеза синхронно-автономной многосвязной системы. Структурная схема синтезируемой системы с рассматриваемым объектом представлена на рис. 3. Для этой системы можем записать

$$\Theta = P_0 - P; \quad Y = K(D)\,\varepsilon; \quad \varepsilon = H^{-1}\Theta.$$

Закон управления в такой замкнутой системе принимает вид

$$[E + S(D)]\,P = S(D)\,P_0, \qquad (5)$$

где

$$S(D) = [E + W\overline{M}]^{-1} WK(D)\,W^{-1} [E + W\overline{M}],$$

$S(D)$ — операторная матрица, являющаяся оператором преобразо-

вания множеств сигналов рассогласования $\Theta_i$ в множества управляемых переменных объекта $P_i$.

Система будет автономной и синхронной при условии диагонализации матрицы $S(D)$ с обязательным тождеством $K_{ii}(D) = K_{jj}(D)$.

Так как матрицы $H$ (матрица жесткости) и $H^{-1}$ (матрица податливости) — числовые, симметричные и всегда положительно опре-

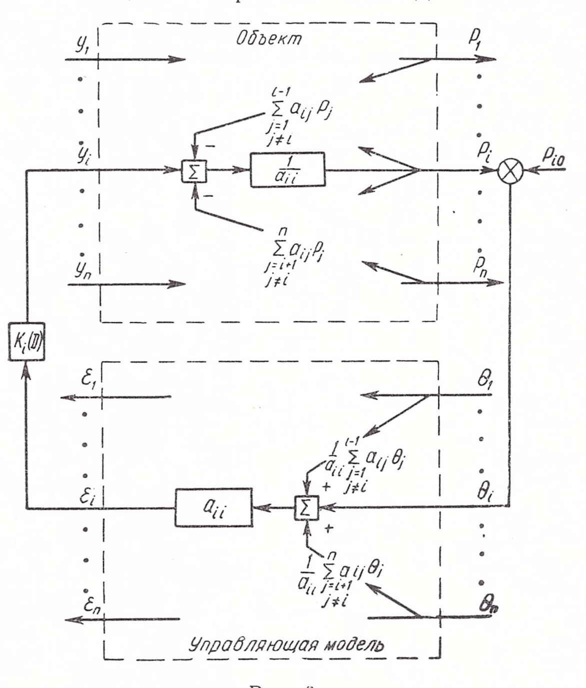



Рис. 3.

деленные [8], при $K_{ii}(D) = K_{jj}(D)$ они взаимно компенсируются, т. е. система будет автономной и синхронной при $K_{ii}(D) = K_{jj}(D)$.

Таким образом, в рассмотренной структуре АМС достигается автономность и синхронность за счет обычного моделирования матрицы податливости в управляющей модели и идентификации параметров передаточных функций исполнительных органов $[K_{ii}(D) = K_{jj}(D)]$ без больших коэффициентов усиления и без дифференцирующих цепей.

3. Рассмотрим вопрос устойчивости в такой системе. Полное характеристическое уравнение замкнутой системы для нашего случая имеет вид

$$\det\{E + HK(D)H^{-1}\} = 0. \tag{6}$$

Для подобных матриц $S(D)$ и $K(D)$ выполняется равенство [9]

$$\det\{E + HK(D)H^{-1}\} = \det\{E + K(D)\}. \tag{7}$$

Так как матрицы $H$ и $H^{-1}$ числовые и положительно определенные, в качестве характеристического уравнения для нашей системы можем принять матричное уравнение [10]

$$\det\{E + K(D)\} = 0. \tag{8}$$

Из этого следует, что система будет устойчивой, если все корни уравнения (8) находятся в левой полуплоскости. Но оператор $K(D)$ представляет собой диагональную матрицу, описывающую исполнительные органы, т. е. те устройства, которые находятся вне объекта (испытуемой конструкции).

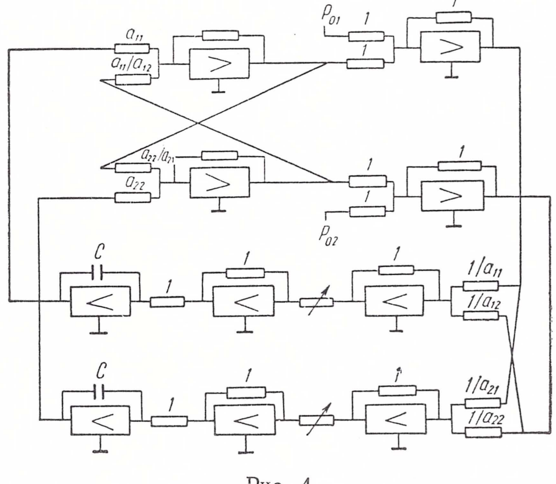



Рис. 4.

Накладывая условия $K_{ii}(D) = K_{jj}(D)$, практически всегда представляется возможным выбрать параметры исполнительных органов таким образом, чтобы обеспечить устойчивость всей многосвязной системы.

4. В качестве примера была рассмотрена система автоматического управления нагружением двумерного объекта (полукрыло самолета АН-24).

Коэффициенты влияния (элементы матрицы податливости) $a_{11}$, $a_{12}$, $a_{21}$, $a_{22}$ определялись экспериментально и вычислены теоретически [11], они имеют следующие значения:

$$a_{11} = 0{,}098,\ a_{21} = a_{12} = 0{,}16,\ a_{22} = 1{,}71.$$

Система исследовалась на электронной модели МН-7. Схема моделирования системы представлена на рис. 4. Задания составлены на основе цикла «стоянка — полет — стоянка» и имеют вид, представленный на рис. 5.

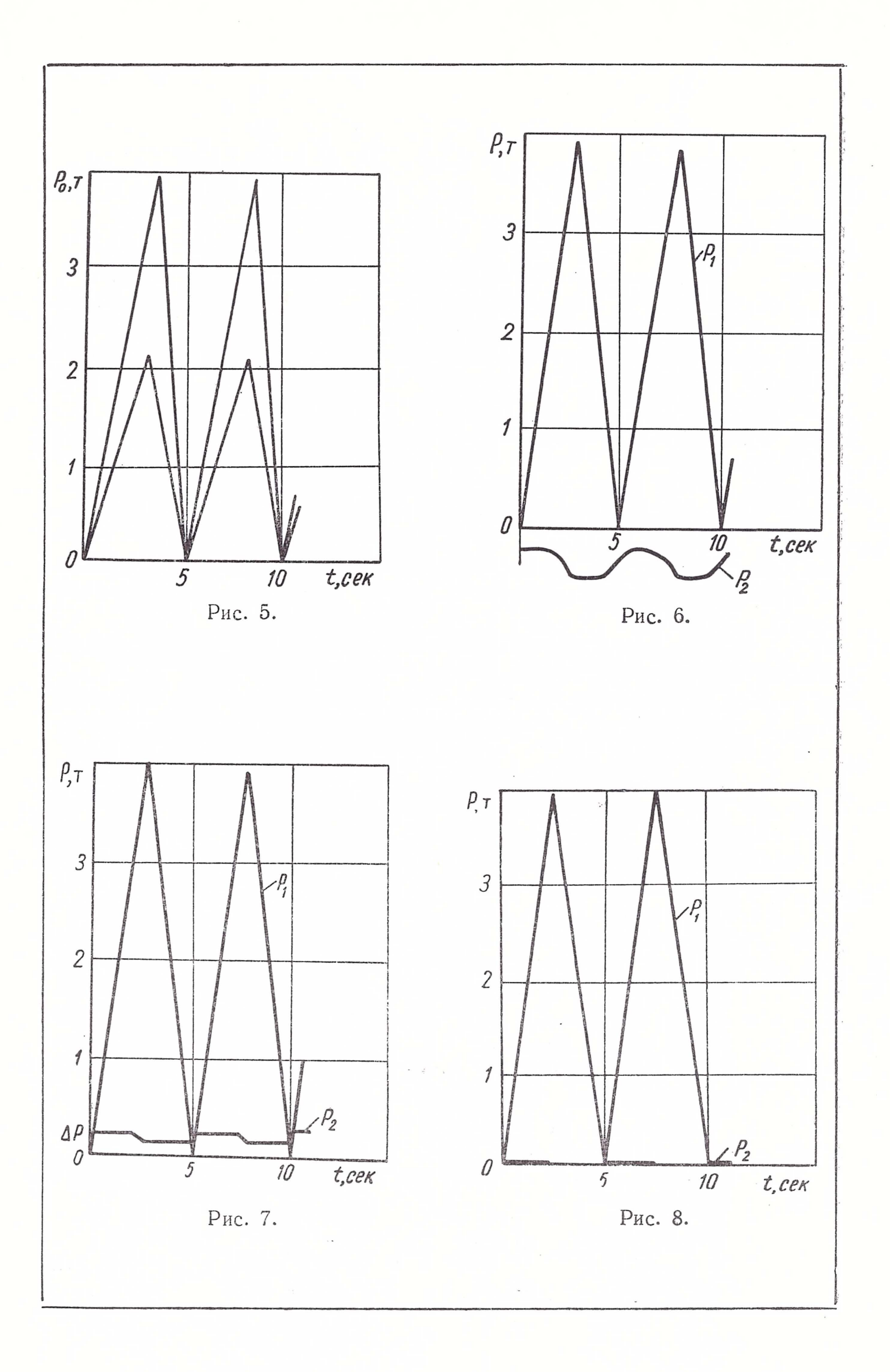



Рис. 5.

Рис. 6.

Рис. 7.

Рис. 8.

Допустимая частота нагружения определяется по формуле

$$f_0 = f_* \sqrt{\rho - 1},$$

где $f_*$ — собственная частота конструкции; $\rho$ — динамический коэффициент. В нашем случае $f_* = 2{,}25$ *гц* (собственная частота крыла самолета АН-24 при симметричных колебаниях), $\rho = 1{,}01$, т. е. амплитуда деформации под действием повторной нагрузки отличается от амплитуды, вызываемой действием статической нагрузки, не более чем на 1%. Следовательно, $f_0 = 2{,}25 \cdot 0{,}1 = 0{,}225$ *гц*. При этой частоте исполнительный механизм и прибор обратной связи можно представить безынерционными звеньями, а силовой цилиндр при отсутствии внешних нагрузок можно рассмотреть как интегрирующее звено [12].

Исследовалась автономность и синхронность каналов нагружения для наиболее тяжелого случая, т. е. когда управляющее воздействие первого канала представляет собой остроконечную пилообразную функцию, а управляющее воздействие второго канала — постоянную величину.

Сравнительные исследования процессов управления нагружением проводились в многосвязных системах со следующими структурами:

а) без управляющей модели с конечными значениями коэффициентов усиления каналов нагружения;

б) без управляющей модели с максимально допустимыми по условиям устойчивости значениями коэффициентов усиления каналов нагружения;

в) с управляющей моделью.

В системе без управляющей модели с конечными значениями коэффициента усиления каналов нагружения в силу связи силовозбудителей через испытуемую конструкцию нельзя достичь синхронности и автономности нагружения (рис. 6).

В системе управления без управляющей модели с максимально допустимыми по условиям устойчивости значениями коэффициентов усиления каналов нагружения коэффициенты усиления имели значения $K_1 = 3$; $K_2 = 170$, не являясь равнозначными, отличающимися почти на два порядка, в силу различных значений степени взаимного влияния силовозбудителей через исследуемую конструкцию. Регулируемая переменная $P_1$ принимала заданное значение $P_{01}$, а регулируемая переменная $P_2$ отличалась от заданной переменной $P_{02}$, имевшей значение $P_{02} = 0$, на значительную величину ошибки $P_2 - P_{02} = \Delta P$ (рис. 7).

Действительно, для замкнутой системы без управляющей модели можем написать:

$$P_1 = W_{11} K_1 (P_{01} - P_1) + W_{11} \overline{M}_{12} P_2,$$
$$P_2 = W_{22} K_2 (P_{02} - P_2) + W_{22} \overline{M}_{21} P_1, \qquad (9)$$

или

$$[1 + W_{11}K_1]\,P_1 + W_{11}\overline{M}_{12}P_2 = W_{11}K_1P_{01},$$
$$[1 + W_{22}K_2]\,P_2 + W_{22}\overline{M}_{21}P_1 = W_{22}K_2P_{02}. \tag{10}$$

Отсюда для нашего случая

$$\left[1 + \frac{K_1}{a_{11}}\right]P_1 - \frac{a_{12}}{a_{11}}P_2 = \frac{K_1}{a_{11}}P_{01},$$
$$\left[1 + \frac{K_2}{a_{22}}\right]P_2 - \frac{a_{21}}{a_{22}}P_1 = \frac{K_2}{a_{22}}P_{02}. \tag{11}$$

Поделив эти уравнения соответственно на $K_1$ и $K_2$, получим

$$\left[\frac{1}{K_1} + \frac{1}{a_{11}}\right]P_1 - \frac{1}{K_1}\cdot\frac{a_{12}}{a_{11}}P_2 = \frac{1}{a_{11}}P_{01},$$
$$\left[\frac{1}{K_2} + \frac{1}{a_{22}}\right]P_2 - \frac{1}{K_2}\cdot\frac{a_{21}}{a_{22}}P_1 = \frac{1}{a_{22}}P_{02}. \tag{12}$$

При $K_1,\ K_2 \to \infty$, как видно из уравнения (12), в пределе $i$-я регулируемая величина будет зависеть только от эталонного значения $P_{0i}$ и не будет зависеть от всех других регулируемых переменных.

Таким образом, увеличение коэффициента усиления каждого из контуров приводит к тому, что процессы с точностью до $\frac{1}{K_i}$ протекают автономно.

Но члены уравнения (12), которые должны устремляться к нулю при увеличении коэффициентов усиления до бесконечности, для нашего случая имеют вид

$$\frac{1}{K_1}\cdot\frac{a_{12}}{a_{11}}P_2 = \frac{1{,}63}{K_1}P_1,$$
$$\frac{1}{K_2}\cdot\frac{a_{21}}{a_{22}}P_1 = \frac{0{,}09}{K_2}P_2, \tag{13}$$

т. е. взаимное влияние развязываемых контуров, вызываемое наличием обратных перекрестных связей $a_{12}$ и $a_{21}$, в сочетании с главными связями $\frac{1}{a_{11}}$ и $\frac{1}{a_{22}}$, на два порядка отличается друг от друга.

Таким образом, автономность в АМС за счет бесконечного усиления может быть получена только при тождестве

$$W_{ii}\,\overline{M}_{ij} = W_{jj}\,\overline{M}_{ji}.$$

С другой стороны, так как реальные усилительные звенья имеют зону насыщения по уровням входных и выходных сигналов, при существенном «перекосе» взаимовлияний в объекте одновременно удовлетворить условиям $K_i \leqslant K_{кр}$ и $K_i \to \infty$ не представляется возможным.

Следовательно, в системе без управляющей модели с максимально допустимыми по условиям устойчивости значениями коэффициен-

тов усиления каналов нагружения не обеспечиваются качества полной автономности.

В системе с управляющей моделью взаимное влияние силовозбудителей через испытываемую конструкцию полностью компенсируются за счет реализации обратного оператора в управляющей модели. Максимально допустимые по условиям устойчивости значения коэффициентов усиления каналов нагружения равны $K_1 = K_2 = 7$, вследствие чего достигается полная синхронность и автономность каналов нагружения (рис. 8).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Литвак В. И., Таций В. Г. Авторское свидетельство, Кл. 42К, 4, № 145381, 18 января 1962.— Бюллетень изобретения, 1962, 5.

2. Мееров М. В. Системы многосвязного регулирования. «Наука», М., 1965.

3. Жук К. Д.— Автоматика, 1964, 4.

4. Пухов Г. Е.— В кн.: Математическое моделирование и электрические цепи. Вып. I. Изд-во АН УССР, К., 1963.

5. Пухов Г. Е.— Известия вузов, Электромеханика, 1961, 9.

6. Mesarovic M. D. The control of multivariable Systems, New York, Wiley, 1960.

7. Мезарович М. Д.— Труды ИФАК, т. 1, М., 1961.

8. Современные методы расчета сложных статически неопределимых систем, Сборник статей. Судпромгиз, Л., 1961.

9. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. «Наука», М., 1965.

10. Пароди М. Локализация характеристических чисел матриц и ее применение. ИЛ, М., 1960.

11. Таций В. Г. Автореферат кандидатской диссертации. КИИГА, 1964.

12. Портнов-Соколов Ю. П.— Сборник работ по автоматике и телемеханике, Изд-во АН УССР, К., 1953.

Доложено на семинаре
20 мая 1966 г.

# МНОГОФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АНАЛОГОВОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Л. Я. ИЛЬНИЦКИЙ

При решении некоторых задач появляется необходимость в отыскании двух и больше функций одной переменной. В процессе моделирования подобных задач применяются функциональные преобразователи, количество которых определяется числом требующихся зависимостей.

Применение дробно-рациональных приближений функций позволяет создать преобразователь аналоговой величины со многими выходами. Каждая из выходных величин с известной точностью будет представлять нужную функцию. Многофункциональный преобразователь в ряде случаев может оказаться проще по конструкции и экономичнее, чем требуемая система однофункциональных преобразователей.

## Синтез многофункциональных преобразователей

Известно [1], что передача графа выражается отношением

$$T_{jq} = \frac{\sum_s P_{jqs}\Delta_{jqs}}{\Delta},$$

где $T_{jq}$ — передача графа от $j$-й до $q$-й вершины; $P_{jqs}$ — передача $s$-го пути от $j$-й до $q$-й вершины; $\Delta$ — определитель графа; $\Delta_{jqs}$ — алгебраическое дополнение $s$-го пути ($P_{jqs}$).

Пусть истоком графа является только одна $j$-я вершина, а стоками будут вершины от 1-й до $k$-й. Тогда, опуская индекс истока $j$, получим передачи графа $T_1, T_2, \ldots, T_q, \ldots, T_k$, которые определяются формулами, подобными приведенному отношению

$$T_q = \frac{\sum_s P_{qs}\Delta_{qs}}{\Delta}. \tag{1}$$

Каждое из полученных выражений передач будет отличаться только лишь числителем, так как знаменателем является один и тот же определитель графа.

Построенная по такому графу электрическая схема будет иметь $k$ выходов с различными коэффициентами передач. Целесообразно при дробно-рациональных функциях передач использовать многозвенные графы, переход от которых к электрическим схемам рассмотрен достаточно подробно в работах [2].

Если имеются дробно-рациональные приближения ряда функций одной переменной с общим знаменателем, то по ним можно рассчитать граф с соответствующими передачами. Созданная согласно графу электрическая схема многофункционального преобразователя должна иметь в некоторых пределах независимые регулировки по различным выходам. Тогда в процессе эксплуатации подстройка и регулировка каналов многофункционального преобразователя будет достаточно простая.

Дробно-рациональные приближения нескольких функций $y_1$, $y_2$, ..., $y_q$, ..., $y_k$ одной переменной с общим знаменателем могут быть представлены по аналогии с приближением одной функции [3] выражениями

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = \hat{a}_{10} + \tilde{a}_1 x + y_1'; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_q = \hat{a}_{q0} + \tilde{a}_q x + y_q'; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_k = \hat{a}_{k0} + \tilde{a}_k x + y_k', \end{array}\right\} \quad (2)$$

где $\hat{a}_{q0}$ — начальное значение функции $y_q$; $\tilde{a}_q x$ — составляющая функции $y_q$, пропорциональная аргументу $x$; $y_q'$ — дробно-рациональная часть, которая имеет вид

$$y_q' = x\,\frac{a_{q0} + a_{q1}x + a_{q2}x^2 + \ldots + a_{q\,(n-1)}\,x^{n-1}}{1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n} = x\,\frac{\sum\limits_{s=0}^{n-1} a_{qs}x^s}{1 + \sum\limits_{s=1}^{n} \alpha_s x^s}. \quad (3)$$

Здесь коэффициенты $a_{qs}$ и $\alpha_s$ являются постоянными величинами, не зависящими от аргумента $x$.

Первые два члена выражения (2) на графе изображаются ветвями, соединяющими истоки и сток. Начальное значение функции

можно представить вершиной, изображающей источник постоянной величины $p_q \hat{a}_{q0}$, где $p_q$ — произвольно выбранное постоянное число. С помощью ветви, передача которой равна $\frac{1}{p_q}$, источник постоянной величины соединяется с вершиной, изображающей переменную величину $y_q$. Второй член правой части выражений (2) может быть представлен ветвью с передачей, равной $\tilde{a}_q$, соединяющей вершины

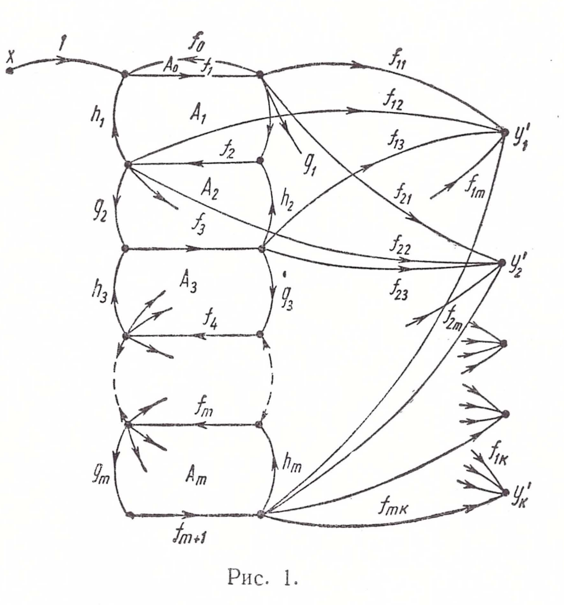


Рис. 1.

$x_q$ и $y_q$. Дробно-рациональная часть (3) может изображаться многозвенным подграфом.

Так как представление на графе и расчет передач ветвей для величины $\hat{a}_{q0}$ и $\tilde{a}_q x$ не встречает затруднений, то рассмотрим определение передач ветвей подграфа (рис. 1), изображающего только дробно-рациональные части $y_q'$.

В подграфе имеется один исток $(x)$ и $k$ стоков $(y_1', y_2', \ldots, y_k')$. Контура подграфа образованы ветвями $f_i$, $f_{i+1}$, $g_i$ и $h_i$ и образуют цепочку из $m$ звеньев. Контурная цепь с помощью ветви $f_{qs}$ соединяется с $q$-ым стоком. При построении электрической схемы по графу можно потребовать, чтобы ветви $f_{qs}$ моделировались наиболее простыми элементами аналоговых вычислительных устройств. В этом случае передачи $f_{qs}$ могут регулироваться только вручную и не будут зависеть от аргумента $x$.

Обозначим буквами $A_i$ контурные передачи звеньев подграфа.

Контурная передача $i$-го звена $A_i$ находится как произведение передач ветвей:

$$A_i = f_i f_{i+1} g_i h_i.$$

Определитель подграфа рассчитывается по формуле

$$\Delta = [(1 - A_0)(1 - A_1)(1 - A_2)\ldots(1 - A_m)]^* = \prod_{i=0}^{m}{}^{*}(1 - A_i), \quad (4)$$

где звездочка обозначает, что все произведения контурных передач касающихся звеньев не учитываются.

Передача $s$-го пути к $q$-й вершине определяется следующим произведением:

$$P_{qs} = f_s f_{qs} \prod_{i=1}^{s-1} f_i g_i.$$

Здесь следует отметить, что при $s = 1$ передача пути

$$P_{q1} = f_1 f_{q1}.$$

Алгебраическое дополнение $s$-го пути запишется в виде

$$\Delta_{qs} = \prod_{i=s+1}^{m}{}^{*}(1 - A_i).$$

Окончательно, передача подграфа к $q$-й вершине по формуле (1) находится так:

$$T_q = \frac{\sum_{s=1}^{m} f_s f_{qs} \prod_{i=1}^{s-1} f_i g_i \prod_{i=s+1}^{m}{}^{*}(1 - A_i)}{\prod_{i=0}^{m}{}^{*}(1 - A_i)}. \quad (5)$$

Для определения передач ветвей подграфа следует приравнять определитель (4) к знаменателю выражения (3)

$$\prod_{i=0}^{m}{}^{*}(1 - A_i) = 1 + \sum_{s=}^{n} \alpha_s x^s \quad (6)$$

и числители функции передачи (5) к числителям дробно-рациональных частей приближения (3)

$$\sum_{s=1}^{m} f_s f_{qs} \prod_{i=1}^{s-1} f_i g_i \prod_{i=s+1}^{m}{}^{*}(1 - A_i) = \sum_{s=0}^{n-1} a_{qs} x^s. \quad (7)$$

Количество равенств (7) соответствует числу моделируемых функциональных зависимостей. Таким образом, соотношения (6) и (7) образуют систему $k + 1$ уравнений. По известной методике из этой

системы находится число звеньев подграфа, значения контурных передач и передач ветвей, в результате чего можно построить электрическую схему функционального преобразователя.

## Дробно-рациональное приближение многофункциональной зависимости

Обычные методы дробно-рациональных приближений для многофункциональной зависимости не дают возможности находить аппроксимирующие выражения с одинаковыми знаменателями. Ниже предлагается метод получения дробно-рациональных приближений с общим знаменателем (2), (3).

Пусть имеется несколько функциональных зависимостей одной переменной: $y_1 = f_1(x)$; $y_2 = f_2(x)$; ... ; $y_k = f_k(x)$.

Найдем дробно-рациональные приближения заданных функций в виде

$$\left.\begin{aligned} f_1(x) &\approx \frac{\sum\limits_{s=0}^{m_1} A_{1s}x^s}{1+\sum\limits_{s=1}^{n}\alpha_s x^s}; \\ f_2(x) &\approx \frac{\sum\limits_{s=0}^{m_2} A_{2s}x^s}{1+\sum\limits_{s=1}^{n}\alpha_s x^s}; \\ &\dots\dots\dots\dots \\ f_k(x) &\approx \frac{\sum\limits_{s=0}^{m_k} A_{ks}x^s}{1+\sum\limits_{s=1}^{n}\alpha_s x^s}; \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad \beta \leqslant x \leqslant \gamma.$$

Здесь $A_{qs}$ — постоянные коэффициенты, значение которых требуется определить; $m_q$ — наибольшие показатели степени полиномов в числителе приближений.

Будем считать, что максимальная степень полинома в знаменателе $n$ задана. Чтобы дробно-рациональные приближения были полными, следует принять

$$n \leqslant m_q \leqslant n+1.$$

Полные дробно-рациональные функции при заданном показателе степени знаменателя и заданном способе расчета коэффициентов $\alpha_s$ и $A_{qs}$ обладают наименьшей погрешностью аппроксимации. Кро-

ме того, при моделировании таких приближений наиболее эффективно используются элементы электрических схем.

Коэффициенты $\alpha_s$ и $A_{qs}$ можно рассчитать по методу равных площадей [3], для чего нужно составить следующие системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{\beta}^{\gamma}\sum_{s=0}^{m_1} A_{1s}x^s dx - \int_{\beta}^{\gamma}\left(1+\sum_{s=1}^{n}\alpha_s x^s\right) f_1(x)\,dx = 0;\\
&\int_{\beta}^{\gamma}\sum_{s=0}^{m_2} A_{2s}x^s dx - \int_{\beta}^{\gamma}\left(1+\sum_{s=1}^{n}\alpha_s x^s\right) f_2(x)\,dx = 0;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\int_{\beta}^{\gamma}\sum_{s=0}^{m_k} A_{ks}x^s dx - \int_{\beta}^{\gamma}\left(1+\sum_{s=1}^{n}\alpha_s x^s\right) f_k(x)\,dx = 0
\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

и

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{\beta}^{\gamma}\left(\sum_{s=0}^{m_1} A_{1s}x^s\right) f_2(x)\,dx - \int_{\beta}^{\gamma}\left(\sum_{s=0}^{m_2} A_{2s}x^s\right) f_1(x)\,dx = 0;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\int_{\beta}^{\gamma}\left(\sum_{s=0}^{m_1} A_{1s}x^s\right) f_k(x)\,dx - \int_{\beta}^{\gamma}\left(\sum_{s=0}^{m_k} A_{ks}x^s\right) f_1(x)\,dx = 0;\\
&\int_{\beta}^{\gamma}\left(\sum_{s=0}^{m_2} A_{2s}x^s\right) f_3(x)\,dx - \int_{\beta}^{\gamma}\left(\sum_{s=0}^{m_3} A_{3s}x^s\right) f_2(x)\,dx = 0;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\int_{\beta}^{\gamma}\left(\sum_{s=0}^{m_{k-1}} A_{(k-1)s}x^s\right) f_k(x)\,dx - \int_{\beta}^{\gamma}\left(\sum_{s=0}^{m_k} A_{ks}x^s\right) f_{k-1}(x)\,dx = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Количество уравнений должно соответствовать количеству определяемых коэффициентов. Полученные системы уравнений могут быть расширены до любого числа разбиением интервала от $\beta$ до $\gamma$ на требуемое число промежутков и соответствующим изменением пределов интегрирования.

Уравнения (8) и (9) можно дополнить условиями совпадения значений заданных и дробно-рациональных функций при некоторых величинах аргумента. Так в некоторых случаях рационально потребовать, чтобы

$$A_{q0} = \hat{a}_{q0} = \lim_{x\to 0} f_q(x).$$

Введение дополнительных условий несколько упрощает решение систем уравнений (8) и (9).

## Пример синтеза многофункционального преобразователя

Для иллюстрации предложенного метода рассмотрим синтез преобразователя, моделирующего функции $y_1 = \sin x$ и $y_2 = \cos x$ при изменении аргумента в пределах от 0 до 2 *рад*.

Известно [4], что дробно-рациональные выражения с полиномом второй степени в знаменателе в требуемых пределах изменения аргумента достаточно хорошо аппроксимируют заданные функции. Поэтому примем, что

$$1 + \sum_{s=1}^{n} \alpha_s x^s = 1 + \alpha_2 x^2$$

Дополнительно потребуем, чтобы при малых значениях аргумента выполнялось условие

$$\frac{\sum\limits_{s=0}^{m_1} A_{1s} x^s}{1 + \alpha_2 x^2} \approx x$$

и предельные значения заданных и дробно-рациональных функций совпадали друг с другом

$$A_{10} = \hat{a}_{10} = 0, \quad A_{20} = \hat{a}_{20} = 1.$$

В силу нечетности синусоидальной функции ее приближение должно иметь вид

$$\sin x \approx \frac{x + A_{13} x^3}{1 + \alpha_2 x^2}, \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant 2. \tag{10}$$

Для четной косинусоидальной функции приближение находится в виде

$$\cos x \approx \frac{1 + A_{22} x^2}{1 + \alpha_2 x^2}, \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant 2. \tag{11}$$

Учитывая выражения (10) и (11), запишем систему уравнений (8) следующим образом:

$$\int_0^2 (x + A_{13} x^3)\, dx - \int_0^2 (1 + \alpha_2 x^2) \sin x dx = 0;$$

$$\int_0^2 (1 + A_{22} x^2)\, dx - \int_0^2 (1 + \alpha_2 x^2) \cos dx = 0,$$

а систему (9) так:

$$\int_0^2 (x + A_{13} x^3) \cos x dx - \int_0^2 (1 + A_{22} x^2) \sin x dx = 0.$$

В выражениях (10) и (11) необходимо определить всего лишь три коэффициента ($A_{13}$, $A_{22}$ и $\alpha_2$), для чего достаточно трех составленных уравнений. В связи с этим пределами интегрирования являются граничные значения аргумента $x$.

В результате решения системы уравнений находим

$$\sin x \approx \frac{x - 0,1023x^3}{x + 0,0707x^2} \tag{12}$$

и

$$\cos x \approx \frac{1 - 0,4049x^2}{1 + 0,0707x^2}\,. \tag{13}$$

Полученные выражения аппроксимируют заданные функции с меньшими погрешностями, чем в работе [4].

Ошибки приближения можно охарактеризовать следующими данными:

| $x$ | $\sin x$ | Формула (11) | $\cos x$ | Формула (12) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,841 | 0,840 | 0,540 | 0,556 |
| 2 | 0,909 | 0,928 | —0,416 | —0,482 |

Для построения графа функционального преобразователя выражения (11) и (12) приводятся к виду формул (2)

$$\sin x \approx -0,145x + x\frac{2,45}{1 + 0,0707x^2} \tag{14}$$

и

$$\cos x \approx 1 - x\,\frac{0,4756x}{1 + 0,0707x^2}\,. \tag{15}$$

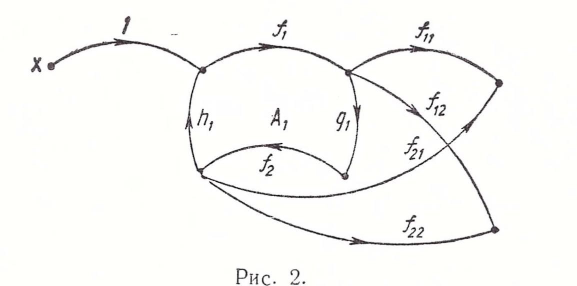



Рис. 2.

Подграф дробно-рациональных частей функций (14) и (15) может содержать только одно звено, как это изображено на рис. 2. Передача от вершины $x$ до вершины $y_1'$ из формулы (5) равна

$$T_1 = \frac{f_1 f_{11} + f_1 f_2 f_{12} g_1}{1 - f_1 f_2 g_1 h_1}$$

и передача $T_2$ до вершины $y_2'$

$$T_2 = \frac{f_1 f_{21} + f_1 f_2 f_{22} g_1}{1 - f_1 f_2 g_1 h_1}.$$

Сопоставляя выражения для передач $T_1$ и $T_2$ с дробно-рациональными частями функций (14) и (15), находим, что

$$f_1 f_2 g_1 h_1 = -0{,}0707x^2; \quad f_1 f_{11} = 2{,}45;$$
$$f_1 f_2 f_{12} g_1 = 0; \quad f_1 f_{21} = 0 \text{ и } f_1 f_2 f_{22} g_1 = 0{,}4756x.$$

Ветви $f_{qs}$ моделируются наиболее простыми элементами электрических цепей. Учитывая это, а также наличие в выражении (14) составляющей, пропорциональной аргументу, и в выражении (15) постоянной составляющей, можем принять, что

$$f_{11} = -0{,}145; \quad f_{12} = 0;$$
$$f_{21} = 0; \ f_{22} = {}^1/_3 \text{ и } g_1 = 1.$$

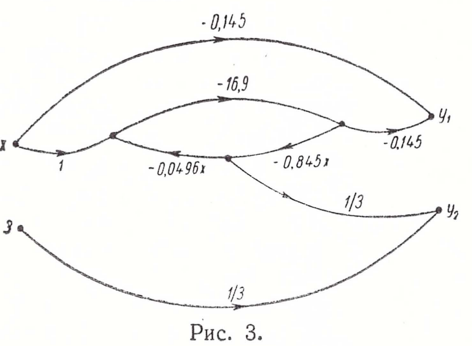



Рис. 3.

Передачи остальных ветвей определяются из найденных равенств так:

$$f_1 = -16{,}9; \quad f_2 = -0{,}845x \text{ и } h_1 = -0{,}0496x.$$

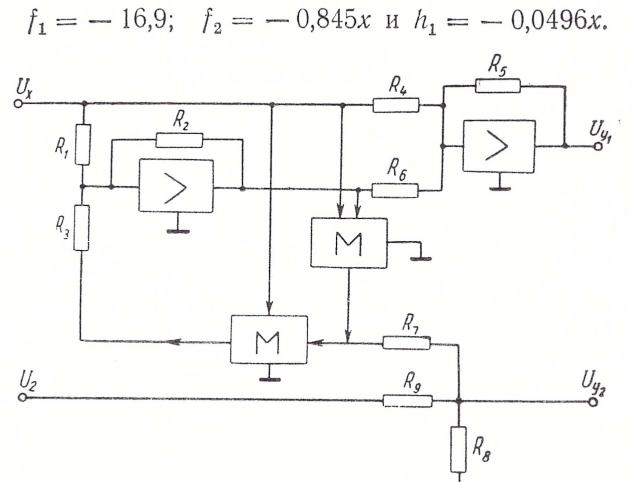



Рис. 4.

Полученный граф функционального преобразователя приведен на рис. 3. Схема преобразователя, соответствующая графу, изображена на рис. 4. Соотношения между значениями сопротивлений определяются передачами ветвей [2].

Если сопоставить построенную схему многофункционального преобразователя со схемами функциональных преобразователей, моделирующих зависимости $y_1 = \sin x$ и $y_2 = \cos x$ в тех же пределах изменения аргумента, то окажется, что для первой схемы требуется почти в два раза меньше элементов.

## Заключение

Применение дробно-рациональных приближений позволяет синтезировать функциональные преобразователи с несколькими выходами. Передача напряжения от входа до выхода может соответствовать наперед заданной функциональной зависимости, поэтому несколько выходных сигналов могут моделировать ряд функций.

Расширение возможностей функционального преобразователя достигается не путем увеличения числа элементов, а за счет более рационального использования последних. Каждая из передач многофункционального преобразователя может меняться в некоторых пределах независимо друг от друга. Это свойство обеспечивает простоту регулировок и настроек устройства.

Предложенный метод расчета коэффициентов дробно-рациональных функций несколько громоздок, но приводит к лучшим приближениям, чем методы, использующие разложение в ряд Тейлора. Метод может применяться как для случая аппроксимации одной функции, так и для случая аппроксимации многих функций одного переменного. При этом аппроксимирующие дробно-рациональные выражения можно находить с общим знаменателем, что другими методами не удается сделать.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Мэзон С., Циммерман Г. Электронные цепи, сигналы и системы. ИЛ, М., 1963.
2. Ильницкий Л. Я.— В кн.: Математическое моделирование и теория электрических цепей. Вып. III. Изд-во АН УССР, К., 1965.
3. Мелентьев П. В. Приближенные вычисления. Физматгиз, М., 1962.
4. Хованский А. Н. Приложение цепных дробей и их обобщение к вопросам приближенного анализа. ГИТТЛ, М., 1956.

Доложено на семинаре
20 мая 1966 г.

# СОДЕРЖАНИЕ

*Печатается по постановлению ученого совета Института кибернетики АН УССР*

Редактор *Т. С. Мельник*. Художественный редактор *И. П. Антонюк*. Оформление художника *С. М. Габовича*. Технический редактор *Н. П. Рахлина*. Корректор *И. С. Євдощук*.

БФ 01104. Зак. 7-2622. Изд. № 175. Тираж 3700. Бумага № 2, 60×90$^{1}/_{16}$. Печ. физ. листов 24,0+1 вкл. Условн. печ. листов 24,125. Учетно-издат. листов 20,41. Подписано к печати 4/X 1967 г. Цена 1 руб. 68 коп.

Издательство «Наукова думка», Киев, Репина, 3.

Напечатано с матриц Киевской фабрики набора на Типоофсетной фабрике Комитета по печати при Совете Министров Украинской ССР. Харьков, ул Энгельса, 11.



МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

НАУКОВА ДУМКА